

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 13. Julio-Diciembre 2025

OBJETOS MATEMÁTICOS

- **Dos disquisiciones y algunas notas al Teorema Fundamental del álgebra.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Intersección de hiperesferas y el teorema de las hiperlúnulas en \mathbb{R}^n .**
Jonathan Josue Ornelas Tapia.
- **Teorema de unificación integral en la medida bidimensional de lúnulas.**
Jonathan Josue Ornelas Tapia.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Modelo matemático y simulación del colapso formal SLE-GRW como una función mediante el axioma de elección para familias infinitas contables de estados cuánticos discretos (CIFDQS).**
Marcos Fajardo Rendón.
- **Propuestas de modelos matemáticos en fractal cuántico, inteligencia artificial y probabilidades.**
Fernando Gustavo Isa Massa.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

<i>Caballero Mora Karen Salomé.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
<i>Guzmán Sánchez Sergio.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Isa Massa Fernando Gustavo.</i>	Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.
<i>Juárez Contreras Socorro.</i>	Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.
<i>Mendoza Pérez Armando Felipe.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Sentiés Nacaspac María de Jesús.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster

Marcos Fajardo Rendón

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 13, Julio-Diciembre 2025 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx ; revistajoom@gmail.com .
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 05 de julio de 2025.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 13.

Julio-Diciembre de 2025

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* número 13, julio-diciembre de 2025, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Dos disquisiciones y algunas notas al Teorema Fundamental del álgebra.	8
<i>Two disquisitions and some notes on the Fundamental Theorem of algebra.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

Intersección de hiperesferas y el teorema de las hiperlúnulas en \mathbb{R}^n.	10
<i>Intersection of hyperspheres and the hyperlunule theorem in \mathbb{R}^n.</i>	
<i>Jonathan Josue Ornelas Tapia.</i>	

Teorema para el cálculo general de áreas de Lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral.	17
<i>Theorem for the general calculation of areas of lunulae with an external arc equal to a semicircle using integral geometry.</i>	
<i>Jonathan Josue Ornelas Tapia.</i>	

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Modelo matemático y simulación del colapso formal SLE-GRW como una función mediante el axioma de elección para familias infinitas contables de estados cuánticos discretos (CIFDQS).	22
<i>Mathematical model and simulation of the formal collapse SLE-GRW as a function using the axiom of choice for countably infinite families of discrete quantum states (CIFDQS).</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

Propuestas de modelos matemáticos en fractal cuántico, inteligencia artificial y probabilidades.	37
<i>Proposals for mathematical models in quantum fractals, artificial intelligence, and probabilities.</i>	
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

CARTA DEL EDITOR

Para esta ocasión, los editores reseñamos brevemente tres obras publicadas en años cuya secuencia calendárica coincide con este 2025.

En 1930, la editorial Verlag S. Hirzel de la ciudad de Leipzig publica la obra titulada “Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie” o “Los Principios Físicos de la teoría cuántica”, cuyo autor fue Werner Heisenberg, obra basada en una serie de conferencias dictadas por él un año antes. Su teoría de matrices es una de las bases de la mecánica cuántica moderna, además que su Principio de Incertidumbre cambió toda la perspectiva de la ciencia. En esta obra, Heisenberg propone un acercamiento completo físico de la teoría cuántica, incluyendo en ella los resultados de sus investigaciones además de analizar los resultados de Niels Bohr, Paul Dirac, Jagadish Bose, Luis de Broglie, Enrico Fermi, Albert Einstein, Wolfgang Pauli, Erwin Schrödinger, Wilhelm Sommerfeld, Emil Rupp, Charles Thomson, Rees Wilson. El conocimiento de la matemática moderna para esa época era una condición necesaria. El texto está dividido en cinco partes y un apéndice. 1) Parte introductoria. 2) Crítica a los conceptos físicos de la teoría corpuscular. 3) Crítica a los conceptos físicos de la teoría ondulatoria. 4) Interpretación estadística de la teoría cuántica. 5) Discusión sobre los experimentos importantes. Apéndice: El aparato matemático de la teoría cuántica: 1) El concepto corpuscular de la materia. 2) La teoría de la transformación. 3) La ecuación de Schrödinger. 4) El método de la perturbación. 5) La resonancia entre dos átomos: la interpretación física de la transformación de matrices. 6) El concepto corpuscular de la radiación. 7) Estadística Cuántica. 8) El concepto ondulatorio para la materia y la radiación. 9) Teoría cuántica de campos ondulatorios. 10) Aplicación de carga negativa al movimiento ondulatorio. 11) Prueba de la equivalencia matemática entre la teoría cuántica de partículas y la teoría ondulatoria. 12) Aplicación a la teoría de la radiación. De este apéndice, la parte (11) el autor analiza que el propósito de la teoría cuántica se enfoca en el hecho de que la representación mental de las partículas y del movimiento ondulatorio son, en sí, dos aspectos diferentes, pero en una misma realidad física, y aunque es un problema de origen puramente físico, es relevante identificar una contraparte a esta dualidad en el contexto matemático de la teoría. Esta analogía dentro del contexto de la realidad física se refiere a que un mismo conjunto de ecuaciones matemáticas se puede interpretar en términos de cualquiera de las imágenes que se adecuen al observador; por ello, la prueba de esta afirmación se puede efectuar adecuadamente y de manera general, sin considerar la forma particular del Hamiltoniano involucrado. Así, la ecuación de Schrödinger que representa el esquema de la partícula para N partículas equivalentes se escribe:

$$\left\{ \sum_{n=1}^N O^n + \sum_{n>m}^N O^{nm} + \dots + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \varphi(x_1, \dots, x_N) = 0 \quad [*]$$

Donde O^n representa al operador que actúa solamente sobre el espacio de coordenadas x_n correspondiente a la n -ésima partícula, y O^{nm} representa una acción sobre las co-ordenadas de ambos en la n -ésima y la m -ésima situación. El análisis que propone Heisenberg es sumamente interesante y continua al involucrar el sistema de funciones ortogonales en términos tridimensionales que satisfacen condiciones límites cuando son expandidas; indica también el uso de matrices que representan los operadores correspondientes en el sistema de co-ordenadas de las partículas; además, nota que los valores numéricos de los elementos matriciales dependen únicamente de los índices subsecuentes y no de las variables n, m . Refiere, además, que para el caso de la estadística Bose-Einstein, se

presenta la simetría en los números cuánticos de las partículas, por ello, también se puede expresar en términos de funciones relacionadas con el número N de partículas en el r -ésimo estado. Conforme describe matemáticamente los objetos cuánticos, va llegando a la conclusión de la identidad entre dos ecuaciones y por tanto a la existencia de la equivalencia matemática entre las representaciones de la partícula y el movimiento ondulatorio. Además, menciona que una prueba similar se puede aplicar para el caso del Principio de Exclusión de Pauli y las relaciones de intercambio. Una conclusión de su trabajo se refiere al hecho de que, las teorías clásicas de las representaciones corpúsculo-ondulatorias son, en sí, completamente diferentes, tanto física como matemáticamente. Sin embargo, las teorías cuánticas de las dos son idénticas.

En 1969 Bruno Dejon y Peter Henrici editaron con apoyo de la casa editorial Wiley-Interscience (una división de John Wiley & Sons Ltd), la serie de ponencias llevadas a cabo en el Simposio titulado “Constructive aspects of the Fundamental Theorem of Algebra” o “Los aspectos constructivos del teorema fundamental del álgebra” celebrado del 5 al 7 de junio de 1967 en las instalaciones del Laboratorio de Investigación IBM en la ciudad de Rüschlikon, Suiza. El propósito del simposio fue reunir a investigadores expertos en el campo del análisis constructivo y numérico y así abrir espacio de discusión sobre el significado del concepto de constructividad dentro del contexto de problemas clásicos bien definidos sobre cálculo numérico, conocido como el problema de la determinación de los ceros de un polinomio. Los editores aclaran que, debido a las obvias limitaciones, únicamente un pequeño grupo de investigadores se reunió para el intercambio de puntos de vista sobre el tema. Sin embargo, quienes tuvieron la oportunidad de estar presentes estuvieron de acuerdo en que los debates fueron informativos y muy estimulantes. Así, el propósito central de esta publicación es que contribuya todavía más a la comprensión entre los aspectos teóricos y prácticos del cálculo algebraico. Se presentaron 17 reportes de investigación (incluidos los editores). 1) Algoritmo de búsqueda de raíces, convergente, rápido y a prueba de fallos. 2) Calculando un cero, por medio de interpolación lineal sucesiva. 3) Algunas observaciones sobre el artículo de Dekker. 4) ¿Qué es un resolutor satisfactorio de ecuaciones cuadráticas? 5) Polinomios matemáticos y físicos. 6) Una forma constructiva sobre la segunda prueba de Gauss del teorema fundamental del álgebra. 7) Algoritmos uniformemente convergentes para la aproximación simultánea de todos los ceros de un polinomio. 8) Sobre la notación de la constructividad. 9) Los bigradients, las determinantes de Henkel y la Tabla Padé. 10) Un algoritmo para un resolutor automático de polinomios generales. 11) La determinación numérica de raíces polinómicas múltiples y estrechamente adyacentes, utilizando un método de Bernoulli mejorado. (En alemán). 12) Procedimientos de búsqueda para resolver ecuaciones polinomiales. 13) Un método para la solución automática de ecuaciones algebraicas. 14) Funciones de iteración para la solución de ecuaciones matriciales polinomiales. 15) Sobre el problema de encontrar los ceros de los polinomios. (En alemán). 16) Factorización de polinomios por medio de procedimientos generalizados de Newton. 17) El teorema fundamental del álgebra en el análisis recursivo. 15 de estos trabajos se presentaron en inglés y dos de ellos en alemán. Vale la pena mencionar la descripción de las ideas de aquella época. En (15), sobre el Teorema fundamental del álgebra el autor inicia con la descripción de conjuntos numéricos. Así, N representa al conjunto de los “números naturales”. \mathbb{Q} , representa al campo de los números racionales complejos, el campo de números de la forma: $a + bi$, en donde $a, b \in \mathbb{Q}$. Además, una secuencia σ de los elementos de \mathbb{Q} , en términos funcionales se escribe: $\sigma: N \rightarrow \mathbb{Q}$ y tiene la propiedad de ser recursiva, si y sólo si, existen funciones recursivas de la forma: f_j ($j = 1, 2, 3, 4$; $f_j: N \rightarrow N$), con la condición necesaria de que para todos los $n \in N$, tengan la forma:

$$\sigma(n) = \frac{f_1(n)}{f_2(n+1)} + \frac{f_3(n)}{f_4(n+1)} i$$

Así, tal secuencia σ es recursivamente convergente sí y sólo sí existe también una función recursiva $k(k: N \rightarrow N)$, tal que para todos los elementos $h, j, n \in N$ posean la siguiente condición:

$$h \geq k(n) \wedge j \geq k(n) \Rightarrow |\sigma(h) - \sigma(j)| < \frac{1}{n+1}$$

La consecuencia inmediata es que un número complejo c es recursivo sí y sólo si existe una secuencia recursiva $\sigma(\sigma: N \rightarrow \mathbf{Q})$ que converga recursivamente con la condición necesaria siguiente:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n).$$

Ahora, si k es una función que satisface la desigualdad escrita anteriormente, para todos los elementos $h, j, n \in N$, entonces también lo hará para los elementos $h, n \in N$. De esta manera continua el autor con la descripción axiomática que justifica la existencia del teorema fundamental del álgebra dentro del análisis recursivo. Finalmente, concluye que la recursividad en todos sus casos mostrados se puede extender a una generalización en espacios métricos recursivos que son totalmente limitados. Dicha generalización representa la analogía constructiva del teorema que afirma la continuidad de la función inversa de la función uno a uno definida sobre un espacio compacto. Sin embargo, esta prueba es aún (para la época) no constructiva. Las pruebas constructivas establecen un teorema fundamental sólido del álgebra en análisis recursivo.

En 1986 la editorial Claredon Press, en Belfast Irlanda del Norte, publica la obra titulada "Quantum concepts in space and time" o "Los conceptos cuánticos en el espacio y el tiempo" participando como editores R. Penrose y C. J. Isham. Su antecedente data de una publicación denominada "Quantum Gravity" o "La gravedad Cuántica" que incluía las ponencias presentadas en 1974 en el Laboratorio Rutherford y en 1980 en el Instituto de Matemáticas de Oxford, y posteriormente en el Colegio Lincoln en 1984. Por ello, el propósito central de esta obra fue examinar nuevamente algunos aspectos fundamentales relativos a la gravedad cuántica, generando reflexión sobre la posibilidad de que algunas reglas de la teoría cuántica pudiesen modificarse antes de lograr un vínculo con la relatividad general. Es así como centraron su esfuerzo de publicación en abordar temas relacionados con los problemas de la física cuántica inherentes al espacio y al tiempo (de ahí el título de la obra). La mayor parte de los artículos publicados presentan un enfoque ensayístico más que un informe de investigación, lo que coincide con otro propósito de esta obra, el explorar fundamentos del tema, más que comunicar el desarrollo de técnicas específicas. La publicación también se centró en abordar problemas cuánticos no locales, de estado de reducción vectorial y los posibles vínculos con la gravedad. Sin embargo, los autores tuvieron toda la libertad de abordar otros tópicos relacionados con estos temas. Si bien no se reportan soluciones a la mayoría de los problemas citados, si se pueden leer muchísimas aportaciones para el pensamiento cuántico de hace 40 años. La obra contiene 27 contribuciones de destacados investigadores de aquella época: 1) Experimentos Einstein-Podolsky-Rosen y los tipos de correlaciones con pares de fotones visibles. 2) Probando

la superposición cuántica con neutrones fríos. 3) El principio de superposición en sistemas macroscópicos. 4) Fenómenos no locales y el efecto Aharonov-Bohm. 5) Efectos gravitacionales sobre sistemas cuánticamente cargados. 6) Reducción de estado continuo. 7) Modelos de reducción. 8) Sobre el posible papel de la gravedad en la reducción de una función de onda. 9) Gravedad y reducción del estado vectorial. 10) Mecánica estocástica, variables ocultas y gravedad. 11) Entropía, incertidumbre y no linealidad. 12) Eventos y procesos en el mundo cuántico. 13) La interpretación de los multi mundos de la mecánica cuántica en la cosmología cuántica. 14) Tres conexiones entre la interpretación de Everett y el experimento. 15) Las amplitudes de transición frente a las probabilidades de transición y una reduplicación del espacio-tiempo. 16) El Tiempo Leibniziano, la dinámica Machiana y la gravedad cuántica. 17) El espacio-tiempo y la gravedad. 18) Topo-dinámica cuántica en dimensiones superiores. 19) Construyendo un universo con cuerdas de bits: un reporte de avance. 20) La función de onda de Hawking para el universo. 21) Cuantificación canónica de los agujeros negros. 22) Las correlaciones y la causalidad en la teoría de campos cuántica. 23) Auto dualidad y las técnicas espinoriales como una aproximación canónica a la gravedad cuántica. 24) Campos cuánticos, coordenadas curvilineales y el espacio-tiempo curvado. 25) Acción efectiva para los valores de esperanza. 26) Materia cargada desde la perspectiva de la teoría Kaluza-Klein. 27) Supergravedad cuántica vía cuantificación canónica.

En (18), los autores proponen la posibilidad de describir eficazmente la relación de las entidades cuánticas, llevándolas al límite continuo, al expandir: $g = \frac{G}{a^2}$; $H = ha$, conservando G, H finitas y a , que representa la retícula de expansión, tendiente a cero. Así, proponen que la ecuación que describe una simple entidad (partículas y/o campos), con puntos extremos R_1, R_2 es la ecuación de Schrödinger para la amplitud $\psi(R_1, R_2)$ de la entidad con puntos extremos R_1, R_2 :

$$-\frac{G}{4} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial R_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial R_2^2} \right] + H |R_1 - R_2| \psi = E \psi$$

Junto con una condición de frontera:

$$\frac{\partial}{\partial (R_1 - R_2)} \psi_{R_1=R_2} = 0$$

También proponen la descripción para el caso de n entidades.

[*] W. Heisenberg. (1949). The physical principles of the quantum Theory. Dover Edition. New York.

En el número 13 de la revista Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos se presentan artículos relacionados con lo anterior mencionado. En la sección de objetos matemáticos se publica un trabajo basado en el objeto matemático “Teorema Fundamental del Álgebra” agregando dos disquisiciones y 6 notas aclaratorias de Joseph Liouville y una demostración mediante Homotopía; así mismo respecto al abandonado tema del cálculo de Lúnulas un autor

rescata mediante un algoritmo para el cálculo integral de volúmenes n -dimensionales en \mathbb{R}^n de hiperlúnulas en la intersección de hiperesferas y un teorema que generaliza el cálculo integral de la medida bidimensional de lúnulas \mathbb{R}^n mediante barridos geométricos y cálculo vectorial para las regiones sin subdivisión, con subdivisión en dos partes y con subdivisión en tres.

La sección objetivos está dedicada a la física cuántica, comenzando con un trabajo que axiomatiza el modelo de colapso formal GRW (Ghirardi-Rimini-Weber) de SLE (spontaneous localization events) utilizando el trabajo de Zermelo-Fraenkel para establecer familias infinitas contables de estados cuánticos discretos (CIFDQS) como una función de elección con una simulación en QISKIT; así mismo un autor propone tres modelos matemáticos con I.A. probabilística en economía, de empleo y un fractal cuántico con autosimilitud y dimensión aplicado a conflicto armado, búsqueda de personas y física.

El JOOM extiende una cordial invitación a enviar trabajos a nuestro congreso amigo 12th 2026 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT 2026) de IEEE www.codit2026.com

Los editores.

Dos disquisiciones y algunas notas al Teorema Fundamental del álgebra.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México, México.

harmendia@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-64838350>

Resumen- El objeto matemático denominado Teorema Fundamental del Álgebra ha cobrado mucha importancia en el estudio de la matemática básica, debido a que, con él, se asegura que todo polinomio de grado n , tendrá exactamente n soluciones, garantizando orden y completitud en todos los procesos algebraicos relativos a encontrar las raíces de ecuaciones. La presente contribución contiene dos disquisiciones y 6 notas aclaratorias. En la primera de ellas, abordo el trabajo de Joseph Liouville y su demostración a este teorema, con tres notas aclaratorias. La segunda disquisición describe una demostración basada en el objeto matemático denominado Homotopía, inherente a la Topología, con tres notas aclaratorias.

Palabras Clave- Campo Complejo, Homotopía, Teorema fundamental del álgebra.

Zusammenfassung- Der Fundamentalsatz der Algebra hat in der Grundlagenmathematik große Bedeutung erlangt, da er garantiert, dass jedes Polynom n -ten Grades genau n Lösungen besitzt. Dies gewährleistet Ordnung und Vollständigkeit in allen algebraischen Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Gleichungen. Dieser Beitrag enthält zwei Abschnitte und sechs Erläuterungen. Im ersten Abschnitt behandle ich die Arbeit von Joseph Liouville und seinen Beweis dieses Satzes, ergänzt durch drei Erläuterungen. Der zweite Abschnitt beschreibt einen Beweis, der auf dem in der Topologie verankerten mathematischen Konzept der Homotopie basiert, und enthält ebenfalls drei Erläuterungen.

Schlagwörter- Fundamentalsatz der Algebra, Homotopie, Komplexe Körper.

Резюме- Математический объект, известный как Фундаментальная теорема алгебры, приобрел значительную важность в изучении фундаментальной математики, поскольку он гарантирует, что каждый многочлен степени n будет иметь ровно n решений, обеспечивая порядок и полноту во всех алгебраических процессах, связанных с нахождением корней уравнений. Данная статья содержит два раздела обсуждения и шесть пояснительных примечаний. В первом разделе обсуждения я рассматриваю работу Жозефа Лиувилля и его доказательство этой теоремы, а также три пояснительных примечания. Во втором разделе обсуждения описывается доказательство, основанное на математическом объекте, известном как гомотопия, присущем топологии, также с тремя пояснительными примечаниями.

Ключевые слова- гомотопия, Комплексное поле, основная теорема алгебры.

Mathematical Subject Classification: 11A07.

I. INTRODUCCIÓN

El Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) establece que todo polinomio con coeficientes representados por números complejos tiene una raíz en este campo \mathbb{C} . Esta idea fue primeramente propuesta por A. Girard en 1629 y por Renato Descartes en 1637, con una formulación un tanto diferente a la utilizada en la actualidad [1]. C. McLaurin y Leonard Euler

realizaron una formulación más precisa proponiendo una forma muy parecida a la de nuestros días. La descripción de esta propuesta afirma que todo polinomio con coeficientes reales se puede descomponer en la forma de un producto de factores lineales y cuadráticos que contienen coeficientes reales. Una primera prueba a esta afirmación fue realizada por J. D'Alembert en 1746, y lo hicieron también Leonard Euler, Pierre Laplace, J. L. Lagrange y algunos otros autores durante la segunda mitad del siglo 18. Sin embargo, todas las pruebas ofrecidas se basaban en la suposición de la existencia de raíces ideales del polinomio y a partir de esta idealización se pretendía demostrar que al menos una de ellas, era un número complejo. Carl Gauss fue quien primeramente realizó la demostración sin basarse en el supuesto de que las raíces realmente existen. Su método de prueba se basa en esencia, en escribir detalladamente el campo de descomposición de un polinomio. En un contexto actual, todas las pruebas del TFA incluyen de alguna forma las propiedades topológicas de los números Reales y Complejos [2]. El papel de la topología consiste en considerar el supuesto de que un polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene una raíz real [3]. Se sugiere que el lector tenga nociones de álgebra superior, concretamente sobre la fórmula integral de Cauchy y su estimación, así como de las nociones básicas de topología inherentes al estudio de la homotopía, ya que las demostraciones se basan en algunas de estas ideas, que, si intento citarlas, la redacción de la idea principal se perdería en el discurso, debido a la extensa continuación y enlace de las proposiciones necesarias para aclarar la propuesta axiomática.

II. DISQUISICIONES.

Disquisición 1

Nota 1.- El TFA en el trabajo matemático de Liouville. El antecedente inmediato es su teorema implicado en el campo complejo \mathbb{C} [6].

Teorema: $f(z)$ tiene componentes enteros, $|f(z)|$ está limitado por $\forall z \in \mathbb{C}$, $\therefore f(z)$ describe un valor constante. \square

Nota 2.

Consecuentemente, si el módulo funcional está delimitado en toda la extensión del campo \mathbb{C} , $f(z)$ representa un polinomio de grado $n + 1$, cuando menos.

Demostración. Sea M el máximo valor de $|f(z)|$ en \mathbb{C}_0 . $f(z)$ posee componentes enteros, y además $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $|f'(z)| < \frac{M}{r}$, (Por el Estimado de Cauchy [6]). Además, como $f(z)$ es entero, se establecen tres

consecuencias: i) $r \rightarrow \infty$, ii) $|f'(z)| = 0$, iii) $f'(z) = 0$. Por lo tanto $f(z)$ es constante. Entonces: $f^n(z) \leq M \forall z \in \mathbb{C} \rightarrow |f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{M}{r}$ (Por el axioma 9 de Peano y el Estimado de Cauchy). Se establecen tres consecuencias: i) $r \rightarrow \infty$, ii) $f^{(n+1)}(z) = 0$, iii) $f^n(z)$ es un valor constante. Por lo tanto, $f(z)$ describe a un polinomio de grado al menos $n + 1$ (Por el Teorema de antidiferenciación). ■

Nota 3.- El lugar geométrico inherente al Estimado de Cauchy es un círculo de radio r y centrado en el origen. Es interesante comentar esta propuesta, conocida como el Estimado de Cauchy. Además, utilizo el trabajo original de Giuseppe Peano: *Artihmetices Principia*, Axioma 9.

Teorema: Sea \mathcal{D} un dominio simplemente conectado. Además, $f(z)$ representa una función analítica en $\mathcal{D} \supset C_0$ (círculo de radio r_0 y centrado en z_0 [6]. Entonces, $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r_0^n}$, $\forall z \in \mathbb{C}_0$ □

Demostración.

$|f^{(n)}(z_0)| \leq \left| (n!) (2\pi i^{-1}) \int_{C_0} (f(z)) ((z - z_0)^{n+1})^{-1} dz \right| \leq (Mn!) (2\pi)^{-1} \leq \left| \int_{C_0} (dz) ((z - z_0)^{n+1})^{n-1} \right|$. (Por las propiedades de Integración). Además, al expandir sobre \mathbb{C}_0 , se tiene : i) $z = z_0 + r_0 e^{it}$; ii) $dz = i r_0 e^{it}$.

Reescribo:

$$\left| \int_{C_0} (dz) ((z - z_0)^{n+1})^{-1} \right| = \left| \int_{C_0}^{2\pi} r_0^{-n} e^{-int} dt \right| = 2\pi r_0^{-n}.$$

(Por cambio de representación rectangular a representación polar y por Propiedades de Integración trigonométrica).

Por lo tanto:

$$|f^n(z_0)| \leq (Mn!)(r_0^n)^{-1} \quad \blacksquare$$

Disquisición 2

Nota 4.- El TFA en el contexto topológico. La homotopía como objeto matemático describe las propiedades invariantes y las propiedades de deformación dentro de un grupo fundamental. Sean f, g dos funciones continuas. Si existen una familia de funciones denotadas por $M(x, q)$, tal que justifiquen la transformación gradual de la función f en la función g , con la condición de que q varíe dentro del intervalo cerrado $[0, 1]$, con $(M(x, 0) = f(x) \wedge M(x, 1) = g(x))$, entonces f, g son homotópicas [4].

TFA.- Sea P un polinomio no constante. $0 \in \forall P \in \mathbb{C}$ □

Nota 5.- Al expandir la función polinomial: $f(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + p_1z + p_0$, con las condiciones: i) $n > 0$; ii) $p_{n-1}, \dots, p_1, p_0 \in \mathbb{C} \therefore \exists z_0 \in \mathbb{C} | f(z_0) = 0$. [5].

Demostración: $\nexists f(z_0) = 0 \rightarrow z \mapsto f(z)$ generaría $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - 0$ (Por Prop. Asociativa de la Adición en \mathbb{C}); al considerar la serie: $\sigma = |p_0| + |p_1| + \dots + |p_{n-1}| + 1$ y además la relación: $z \in S^1$, con S como la representación de un espacio topológico, y por la Propiedad Asociativa de la multiplicación y la Propiedad Asociativa de la Adición en \mathbb{C} , tenemos: $|f(\sigma z - \sigma^n z^n)| \leq |p_0 + \sigma |p_1| + \dots + \sigma^{n-1} |p_{n-1}| \leq \sigma^{n-1} (|p_0| + |p_1| + \dots + |p_{n-1}|) < \sigma^n =$

$|\sigma^n z^n|$ [5], por contradicción al Teorema: $[S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}$, basado en $[f] \mapsto \text{grad}(f)$ ■

Nota 6.- Las propiedades topológicas hacen que $f(\sigma z)$ se localice en interior de un círculo topológico de centro $\sigma^n z^n$ y con radio $|\sigma^n z^n|$. Es de notar que el segmento que une a estos dos objetos matemáticos no contiene al punto origen. La consecuencia inmediata es la generación de la Homotopia: $H: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C} - 0$, con aplicación inicial: $z \rightarrow f(\sigma z)$, que es nulhomotópica y aplicación final: $z \rightarrow \sigma^n z^n$, también nulhomotópica. Entonces, al retraerla topológicamente, tenemos: $r: \mathbb{C} - 0 \rightarrow S^1$, con la condición: $r(z) = \frac{z}{|z|}$. De este modo, se obtiene $S^1 \rightarrow S^1$ y en consecuencia $z \rightarrow z^n$, lo que hace contradecir el teorema mencionado y relativo al mapeo de funciones en superficies topológicas.

III. CONCLUSIONES.

El TFA ha sido una propuesta muy valorada para el lenguaje matemático contemporáneo. Las demostraciones a esta propuesta han enriquecido y ampliado las ideas matemáticas a lo largo del tiempo. Esta breve aportación la centré en elaborar dos disquisiciones y 6 notas basadas en el conocimiento del campo de números complejos cuyo estudio permite la solución de ecuaciones en todas sus formas, cuya ventaja es su uso en otras ramas del conocimiento, como la ingeniería y la física; y de la topología cuya ventaja principal radica en la profunda generalización y abstracción, al trabajar ideas relacionadas con el concepto de cercanía, sin el requisito del concepto de distancia métrica, abarcando así, un conjunto mayor de espacios topológicos.

REFERENCIAS

- [1] Remeslennikov, V. N. (1988). *Fundamental theorem of algebra*. Encyclopaedia of Mathematics. Vol. 1, 75. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- [2] Kurosh, A. G. (1972). *Higher algebra*. New York. MIR Publishers.
- [3] Башмакова, И. Г. (1957). “о доказательстве основной теоремы алгебры”. *Istor. Mat. Isled.* No. 10, 257-304.
- [4] Hatcher, A. (2001). *Algebraic Topology*. Cambridge, U. K. Cambridge University Press.
- [5] Prieto, C. (2017). *Topología básica*. Ciudad de México. Fondo de Cultura Económica.
- [6]. Fine, B.; Rosenberg, G. (1997). *The Fundamental Theorem of Algebra*. Berlin. Springer Verlag.

Intersección de hiperesferas y el teorema de las hiperlúnulas en \mathbb{R}^n

Jonathan Josue Ornelas Tapia

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México, México.

ornelas.tapia.jonathan@gmail.com <https://orcid.org/0009-0004-6497-2017>

Resumen- En este trabajo se introduce el Teorema de las hiperlúnulas, una formulación generalizada para el cálculo integral de volúmenes n -dimensionales en \mathbb{R}^n . Las hiperlúnulas se entienden como regiones delimitadas por casquetes generados en la intersección de hiperesferas, lo que amplía de manera natural la noción clásica de lúnula en el plano. El método se construye a partir de la extensión de mis resultados previos en \mathbb{R}^2 , donde logré formular un esquema unificado independiente de restricciones sobre la forma de los arcos. En esta versión general, la propuesta se fundamenta en técnicas de cálculo vectorial, cambios de variable en integrales múltiples y el uso sistemático de coordenadas esféricas e hiperesféricas. El resultado establece un marco sistemático y consistente para abordar configuraciones geométricas de cualquier dimensión, consolidando así una herramienta integral aplicable en contextos de geometría integral y análisis multivariable.

Palabras Clave- hiperlúnula, medidas n -dimensionales, geometría integral, hiperesferas, teorema.

Abstract- This paper introduces the Theorem of Hyperlunulae, a generalized formulation for the integral calculation of n -dimensional volumes in \mathbb{R}^n . Hyperlunulae are defined as regions delimited by spherical caps arising from the intersection of hyperspheres, naturally extending the classical notion of planar lunes. The method builds upon my previous results in \mathbb{R}^2 , where a unified framework was established independently of arc restrictions. The general formulation presented here relies on vector calculus, multivariable change of variables, and the systematic use of spherical and hyperspherical coordinates. The result provides a consistent and systematic approach to geometric configurations in arbitrary dimensions, consolidating a tool applicable to problems in integral geometry and multivariable analysis.

Keywords- hyperlunules, n -dimensional measures, integral geometry, hyperspheres, theorem.

Mathematical Subject Classification: 51M25, 26B15, 53A07.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las lúnulas ha sido, desde la Antigüedad, un tema de interés tanto geométrico como analítico. En un trabajo previo se presenta un teorema general para el cálculo de áreas de lúnulas en \mathbb{R}^2 , bajo la restricción de que el arco exterior correspondiera a una semicircunferencia [1]. Posteriormente, se desarrolla una extensión más general —realizada en paralelo a la presente investigación— en la que el método no depende de condiciones particulares sobre el arco, lo que permite obtener una formulación unificada para el cálculo de la medida bidimensional de lúnulas.

El presente artículo constituye la continuación natural de esa línea de investigación. El objetivo es trasladar las ideas previamente desarrolladas hacia espacios de mayor

dimensión, con énfasis en las regiones generadas por intersecciones de esferas en \mathbb{R}^n .

Para ello, se introduce y demuestra el Teorema de las hiperlúnulas, el cual establece un procedimiento sistemático para calcular volúmenes n -dimensionales mediante técnicas de cálculo integral, cálculo vectorial y transformaciones de coordenadas sustentadas en el jacobiano correspondiente.

De esta manera, se consolida una progresión conceptual que parte de las lúnulas clásicas en dos dimensiones y alcanza su extensión a espacios de dimensión arbitraria, ofreciendo un marco teórico general con aplicaciones potenciales en geometría integral y análisis multivariable

II. OBSERVACIONES SOBRE EL MARCO GEOMÉTRICO DE LA HIPERLÚNULA

El término *lúnula* aparece históricamente en la geometría clásica como una figura plana delimitada por arcos de circunferencia, estudiada desde la antigüedad en el contexto euclidiano. No obstante, la evolución de la geometría a partir del siglo XIX permitió extender de manera sistemática conceptos geométricos clásicos a espacios de dimensión arbitraria y, más generalmente, a variedades diferenciables dotadas de una estructura métrica.

En particular, la geometría riemanniana proporciona un marco natural para la generalización de nociones geométricas elementales, al permitir definir distancia, longitud de curvas y volumen mediante una métrica g , incluso en ausencia de una estructura euclidiana plana. [5]

Dentro de este contexto, construcciones originalmente bidimensionales pueden reinterpretarse y extenderse a espacios de mayor dimensión, manteniendo su intuición geométrica fundamental.

El prefijo *hiper* se utiliza aquí precisamente para señalar esta extensión estructural y dimensional del concepto clásico de lúnula. La *hiperlúnula* no se concibe como una mera figura plana, sino como una generalización geométrica definida en \mathbb{R}^n —y, de manera más general, en variedades riemannianas— donde la noción de arco y región se reemplaza por intersecciones y subconjuntos determinados por estructuras métricas de dimensión superior.

En este sentido, el uso del término *hiperlúnula* refleja tanto la raíz histórica del concepto como su formulación moderna, situando al objeto dentro del lenguaje contemporáneo de la geometría sin perder su conexión con la tradición clásica.

III. DEFINICIONES, PROPIEDADES Y TEOREMAS AUXILIARES.

A continuación, se presentan las definiciones, propiedades y teoremas auxiliares que constituyen el marco preliminar de este trabajo, proporcionando las herramientas necesarias para la formulación y demostración del teorema principal, y garantizando tanto su consistencia interna como la unicidad de su enunciado.

Definición (Def.) 1.- Matriz Jacobiana [2]:

Sea $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable de clase C^1 , con

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

La matriz jacobiana de F se define como:

$$J_F(u) = [\partial x_i / \partial u_j]_{i,j=1}^n \quad (1)$$

El determinante de esta matriz se denomina determinante jacobiano y se denota por:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det(J_F(u)) \quad (2)$$

Def. 2.- Coordenadas hipersféricas [3]:

Todo punto $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse mediante un radio $\rho \geq 0$ y ángulos $\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ según:

$$x_j = \rho \left(\prod_{k=1}^{j-1} \sin \phi_k \right) \cos \phi_j, \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad (3)$$

$$x_{n-1} = \rho \left(\prod_{k=1}^{n-2} \sin \phi_k \right) \cos \theta \quad (4)$$

$$x_n = \rho \left(\prod_{k=1}^{n-2} \sin \phi_k \right) \sin \theta \quad (5)$$

Esta parametrización corresponde a la descripción estándar de la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, construida inductivamente a partir de proyecciones sucesivas en subesferas de menor dimensión.

Def. 3.- Jacobiano en coordenadas hipersféricas [3]: El determinante jacobiano correspondiente al cambio de coordenadas hipersféricas en \mathbb{R}^n , con parámetros ≥ 0 y ángulos $\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ está dado por:

$$J(\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\sin \phi_k)^{n-1-k} \quad (6)$$

De esta manera, el elemento de volumen se escribe como:

$$dV = \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\sin \phi_k)^{n-1-k} d\rho d\phi_1 \dots d\phi_{n-2} d\theta \quad (7)$$

Def. 4.- Condición de intersección de dos esferas en \mathbb{R}^n [4]:

Sean dos esferas $S(C_1, r_1), S(C_2, r_2)$ en \mathbb{R}^n con centros $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ y radios $r_1, r_2 > 0$. Denotemos por $d = \|C_1, C_2\|$ la distancia entre sus centros. La intersección de las esferas es no vacía y de dimensión n si y solo si se cumple la desigualdad

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \quad (8)$$

Teorema (Teo.) 1.- Cambio de variable en integrales múltiples [2]:

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación de clase C^1 , inyectiva casi en todas partes, cuyo determinante jacobiano es continuo y no nulo en U .

Si $f: F(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \int_{F(U)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_U f(F(u_1, \dots, u_n)) \left| \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n \end{aligned} \quad (9)$$

IV. DEFINICIÓN DE LA HIPERLÚNULA EN \mathbb{R}^n

Def. 5.- Región Hiperlúnular en \mathbb{R}^n :

Sean $S(O_1, r_1), S(O_2, r_2)$ dos esferas en \mathbb{R}^n con centros O y radios r tal que cumplan con la condición de intersección (Definición 4).

La hiperlúnula asociada a $S(O_1, r_1)$ respecto a $S(O_2, r_2)$ se define como la región

$$\Omega(O_1 | O_2) = \{\omega \in B(O_1, r_1) : \|\omega - O_2\| \geq r_2\},$$

donde $B(O, r) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \|\omega - O\| \leq r\}$, a lo que denominaremos la bola sólida de centro C_1 y radio r_1 .

Sea, la porción de la hipersfera $S(O_1, r_1)$ delimitada por el casquete generado por la intersección con $S(O_2, r_2)$. Desde el punto de vista geométrico, la región hiperlúnular puede interpretarse como una porción de hipersfera sólida privada de un subconjunto inducido por la intersección, lo que da lugar a una configuración con contribuciones de curvatura efectiva negativa asociadas al casquete excluido [11]. En la Figura 2 se observa la configuración correspondiente a una región hiperlúnular en \mathbb{R}^3 .

V. TEOREMA

Sea $\Omega(O_1 | O_2)$ la región correspondiente a la hiperlúnula delimitada por dos hipersferas de centros O_1, O_2 y radios r_1, r_2 , respectivamente.

El volumen n -dimensional de la región Hiperlúnular Ω se obtiene a través de la integral múltiple:

$$V_L^{(n)} = \int_{\Omega} d\Psi \quad (10)$$

VI. DEMOSTRACIÓN

Para iniciar, expongo el cambio clásico de coordenadas en \mathbb{R}^2 , que constituye el punto de partida esencial del presente trabajo y se encuentra descrito en la Definición 2.

$$\omega_1 = \rho \cos \psi_1, \omega_2 = \rho \sin \psi_1 \quad (11)$$

Para evitar ambigüedades en la notación, aclaro que con ω designo de manera general a las coordenadas cartesianas $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, mientras que con ψ represento a los ángulos introducidos en el proceso de parametrización, independientemente de su subíndice particular. La única variable que permanece invariable en todos los casos es ρ , entendida como la magnitud radial asociada a la distancia al origen.

Con las convenciones anteriores, paso ahora a mostrar la formulación explícita del cambio de coordenadas en los siguientes entornos. En primer lugar, presento el caso tridimensional \mathbb{R}^3 , donde las coordenadas se expresan en términos de la magnitud radial ρ y dos ángulos ψ , lo que corresponde al sistema esférico clásico.

$$\omega_1 = \rho \sin \psi_2 \cos \psi_1, \omega_2 = \rho \sin \psi_2 \sin \psi_1, \omega_3 = \rho \cos \psi_2 \quad (12)$$

Posteriormente, extendiendo este mismo esquema al espacio \mathbb{R}^4 , en el cual interviene un ángulo adicional que multiplica a los factores trigonométricos previos, dando lugar a la parametrización hipersférica.

$$\omega_1 = \rho \sin \psi_3 \sin \psi_2 \cos \psi_1, \omega_2 = \rho \sin \psi_3 \sin \psi_2 \sin \psi_1, \omega_3 = \rho \sin \psi_3 \cos \psi_2, \omega_4 = \rho \cos \psi_3 \quad (13)$$

Se observa un patrón consistente en el desarrollo de cada variable al pasar de un entorno \mathbb{R}^{n-1} a un \mathbb{R}^n . A partir de este análisis, he formulado una variante propia para el cambio de variable, la cual mantiene equivalencia con la parametrización hipersférica estándar de la Definición 2, pero cuya notación resulta más clara y sencilla de interpretar en el marco de este trabajo. En consecuencia, presento a continuación la expresión generalizada que utilizaré en el desarrollo del teorema.

Def. 6.- Coordenadas hipersféricas generalizadas: Todo punto $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse mediante un radio $\rho \geq 0$ y ángulos $\psi_1, \dots, \psi_{n-2} \in [0, 2\pi]$ según:

$$\omega_i = \begin{cases} \rho \left[\prod_{k=1}^{n-2} \sin \psi_{k+1} \right] \cos \psi_1, & i = 1 \\ \rho \left[\prod_{k=1}^{n-2} \sin \psi_{k+1} \right] \sin \psi_1, & i = 2 \\ \rho \left[\prod_{k=1}^{n-3} \sin \psi_{k+2} \right] \cos \psi_{n-2}, & i \in \mathbb{Z}^+, i > 2, i \neq n \\ \rho \cos \psi_{n-1}; & i \in \mathbb{Z}^+, i > 2, i = n \end{cases} \quad (14)$$

Esta parametrización corresponde a la descripción estándar de la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^2$, construida inductivamente a partir de proyecciones sucesivas en subesferas de menor dimensión. [3]

Para sustentar el cambio de coordenadas en el entorno \mathbb{R}^4 , comienzo mostrando el cálculo explícito del determinante jacobiano asociado.

$$J(\rho, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\partial(\rho, \psi_1, \psi_2, \psi_3)} = \begin{vmatrix} \sin \psi_3 \sin \psi_2 \cos \psi_1 & -\rho \sin \psi_3 \sin \psi_2 \sin \psi_1 & \rho \sin \psi_3 \cos \psi_2 \cos \psi_1 & \rho \cos \psi_3 \sin \psi_2 \cos \psi_1 \\ \sin \psi_3 \sin \psi_2 \sin \psi_1 & \rho \sin \psi_3 \sin \psi_2 \cos \psi_1 & \rho \sin \psi_3 \cos \psi_2 \sin \psi_1 & \rho \cos \psi_3 \sin \psi_2 \sin \psi_1 \\ \sin \psi_3 \cos \psi_2 & 0 & -\rho \sin \psi_3 \sin \psi_2 & \rho \cos \psi_3 \sin \psi_2 \\ \cos \psi_3 & 0 & 0 & -\rho \sin \psi_3 \end{vmatrix} \quad (15)$$

A partir de la matriz construida con las derivadas parciales de las transformaciones hipersféricas, se obtiene el factor de escala que permite convertir integrales en coordenadas cartesianas a integrales en coordenadas hipersféricas.

$$\left| \frac{\partial(x, y, z, w)}{\partial(\rho, \psi_1, \psi_2, \psi_3)} \right| = \rho^3 \sin^2 \psi_1 \sin \psi_2 \quad (16)$$

Este procedimiento garantiza que la medida diferencial refleje correctamente la geometría del espacio de cuatro dimensiones, constituyendo un paso fundamental para la generalización posterior. Una vez obtenido el resultado en \mathbb{R}^4 , conviene comparar el factor jacobiano con los casos de menor dimensión.

En \mathbb{R}^2 el determinante se reduce a:

$$J(\rho, \psi_1) = \rho \quad (17)$$

Mientras que en \mathbb{R}^3 se obtiene:

$$J(\rho, \psi_1, \psi_2) = \rho^2 \sin \psi_1 \quad (18)$$

La expresión hallada en \mathbb{R}^4 (18) muestra con claridad que existe un patrón recurrente: en cada dimensión aparece la potencia correspondiente de la variable radial, acompañada de productos de senos con exponentes decrecientes. Esta consistencia refuerza la validez del método y evidencia que el proceso no es arbitrario, sino que responde a una estructura general.

De la comparación anterior se desprende una expresión general para el determinante jacobiano en \mathbb{R}^n . Este resultado se fundamenta en la Definición 3, de la cual parto para formular la generalización, adaptándola además a la notación propia que adopto en este trabajo. Así, el factor de escala queda dado por la potencia ρ^{n-1} , multiplicada por un producto de senos de los ángulos introducidos en la parametrización. De este modo, se obtiene un jacobiano único y sistemático, aplicable a cualquier dimensión, lo cual permite consolidar la formulación integral de los volúmenes n -dimensionales de hiperlúnulas.

$$J(\rho, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\sin \psi_k)^{n-k-1} \quad \square \quad (19)$$

Con base en la Definición 3 y 5, es posible establecer ahora el elemento diferencial de volumen en \mathbb{R}^n .

Def. 7.- Jacobiano único para volúmenes n -dimensionales de hiperlúnulas:

El determinante jacobiano correspondiente al cambio de coordenadas hipersféricas en \mathbb{R}^n con base en la definición 5, está dado por: $J(\rho, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n) = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)}{\partial(\rho, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n)}$

De esta manera el elemento de volumen n -dimensional se escribe como:

$$d\Psi = \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} (\sin \psi_k)^{n-k-1} d\rho d\psi_2 \dots d\psi_{n-2} d\psi_1 \quad \square \quad (20)$$

Finalmente, es necesario señalar que la validez de la región Ω depende de que las hipersferas consideradas en \mathbb{R}^n satisfagan las condiciones establecidas en la Definición 5.

Con todos los elementos previamente establecidos, es posible formular la integral que proporciona el volumen n -dimensional de la hiperlúnula delimitada por hiperesferas en \mathbb{R}^n . La expresión queda dada por:

$$V_L^{(n)} = \int \dots \int_{\Omega(C_1|C_2)} J(\rho, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) d\rho d\psi_2 \dots d\psi_{n-2} d\psi_1 \quad (21)$$

De este modo, la expresión puede presentarse en forma funcional reducida como:

$$V_L^{(n)} = \int_{\Omega} d\Psi \quad \blacksquare$$

Donde $V_L^{(n)}$ corresponde al volumen n -dimensional de la hiperlúnula.

De esta manera, la construcción se encuentra completa: la integral general obtenida constituye una formulación única, consistente y aplicable a cualquier dimensión. Con ello, queda demostrado el Teorema de las hiperlúnulas, estableciendo un marco integral definitivo para el cálculo de volúmenes n -dimensionales generados por intersecciones de hiperesferas.

Con el fin de aportar una intuición visual acerca del objeto en estudio, en la Figura 3, 4 y 5 se presenta una representación gráfica de una hiperlúnula en \mathbb{R}^n . Si bien no corresponde a una construcción geométrica estricta, la ilustración permite sugerir la estructura espacial que caracteriza a este tipo de regiones.

El resultado se fundamenta en la extensión de las construcciones bidimensionales hacia espacios de dimensión arbitraria, utilizando herramientas de cálculo vectorial y cambios de variable en integrales múltiples mediante coordenadas esféricas e hiperesféricas. Este procedimiento no solo garantiza la existencia y unicidad de la solución, sino que también asegura la consistencia interna del método. Al no depender de la forma específica de los casquetes que delimitan las hiperlúnulas, la formulación adquiere un carácter plenamente general, capaz de abarcar en un mismo marco tanto los casos particulares ya conocidos como su proyección a dimensiones superiores.

VII. ESCOLIO (INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y DEFINICIÓN TEXTUAL DE LA HIPERLÚNULA).

En el estudio de las configuraciones geométricas generadas por la intersección de dos esferas en \mathbb{R}^n (véase la Figura 1 para una representación del caso tridimensional), la atención suele centrarse en la región común delimitada por ambas. Sin embargo, dicha región no constituye el objeto de interés en el presente trabajo.

En efecto, cada esfera determina, a partir de la otra, una porción propia delimitada por el casquete inducido por la intersección. Estas porciones, que constituyen subconjuntos volumétricos diferenciados y no coincidentes con la región de intersección, serán denominadas en lo sucesivo hiperlúnulas o regiones hiperlúnulares.

La introducción de este concepto resulta esencial para extender los métodos de cálculo integral previamente aplicados a lúnulas planas a un marco de dimensión arbitraria, permitiendo una formulación geométrica y analítica coherente en \mathbb{R}^n .

Desde una perspectiva geométrica más amplia, la hiperlúnula puede entenderse como una región cuya estructura resulta de una hiperesfera dotada de un “hueco” inducido por

la intersección, lo que introduce una contribución de curvatura negativa asociada a la porción excluida. Esta característica la vincula naturalmente con consideraciones propias de la geometría conformal [10], en la medida en que la eliminación del casquete altera la estructura angular local sin depender de una métrica específica. En este sentido, la hiperlúnula constituye un objeto geométrico híbrido cuya interpretación trasciende el marco puramente euclidiano, resultando compatible con enfoques conformes en dimensión arbitraria.

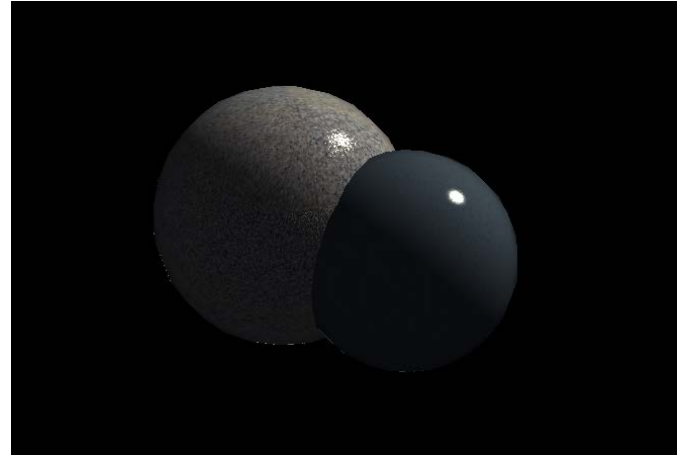


Fig. 1 Representación en \mathbb{R}^3 de dos esferas intersectándose. La intersección genera dos regiones hiperlúnulares, una asociada a cada esfera.



Fig. 2 Visualización en \mathbb{R}^3 de una hiperlúnula individual.

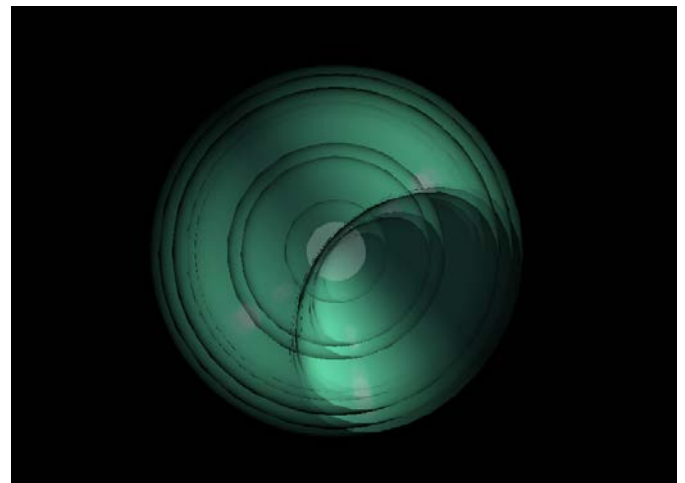


Fig. 3 Representación gráfica de una hiperlúnula en \mathbb{R}^n .

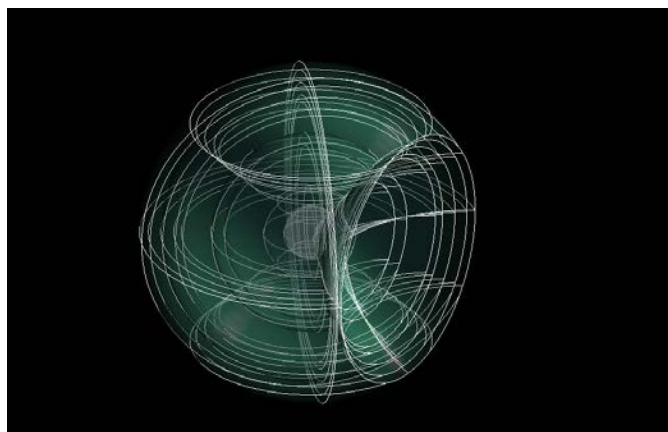


Fig. 4 Representación gráfica del esqueleto de una hiperlúnula en \mathbb{R}^n .

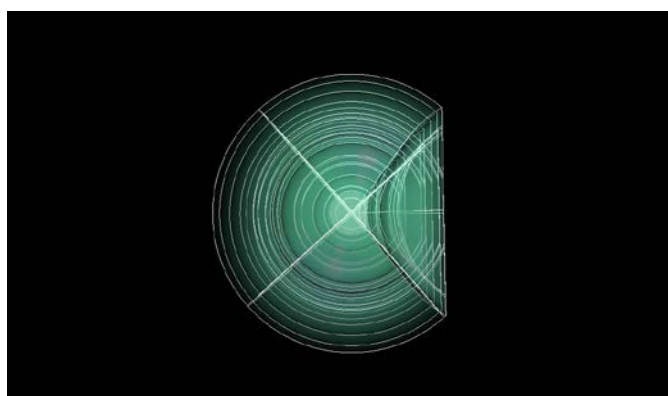


Fig. 5 Representación gráfica del esqueleto de una hiperlúnula en \mathbb{R}^n vista superior.

VIII. PROBLEMA DE HIPERLÚNULA EN \mathbb{R}^3

Enunciado. Determinar el volumen de la hiperlúnula en \mathbb{R}^3 delimitada interiormente por la esfera (Véase la figura 4):

$$S_1: x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4 \quad (22)$$

y exterior a la esfera:

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (23)$$

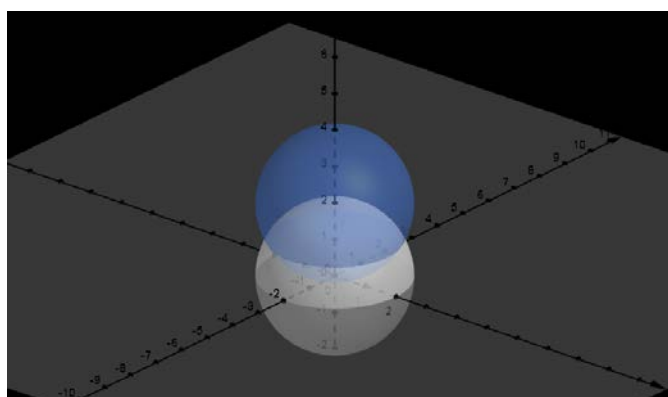


Fig. 4 Representación visual de apoyo para el problema enunciado.

Desarrollo.

En primer lugar, identificamos los datos geométricos implícitos en las ecuaciones dadas:

La esfera S_1 tiene centro $O_1(0,0,2)$ y radio $r_1 = 2$

La esfera S_2 tiene centro $O_2(0,0,0)$ y radio $r_2 = 2$

Además de expresar el dominio en su sistema de coordenadas original, el cual corresponde a coordenadas rectangulares:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$$

La distancia entre los centros es:

$$d = \|O_1 - O_2\| = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = 2 \quad (24)$$

Se procede a verificar la condición de intersección establecida en la Definición 5, $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$. Es decir:

$$|2 - 2| < 2 < 2 + 2, \quad (25)$$

la cual se cumple. Esto garantiza que ambas esferas efectivamente se cortan, de modo que la región Hiperlúnular está bien definida.

Para localizar la superficie de intersección, se parte de la ecuación (22).

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4, \quad (26)$$

que se desarrolla como:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 4 \quad (27)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad (28)$$

Por otro lado, con la ecuación de S_2 (23) se sustrae de la expresión desarrollada (28) de la segunda, obteniendo:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2 - 4z) = 4 - 0 \quad (29)$$

lo que conduce a:

$$4z = 4 \Rightarrow z = 1 \quad (30)$$

Esto indica que la intersección de ambas esferas ocurre en el plano horizontal $z = 1$. Sustituyendo (30) en la ecuación de S_2 (23) se determina la curva de intersección:

$$x^2 + y^2 + 1^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \quad (31)$$

Por lo tanto, la sección de corte es una circunferencia de radio $r = \sqrt{3}$ centrada en el origen, situada en el plano $z = 1$.

Con esta caracterización geométrica del dominio, se procede a efectuar el cambio de variables a coordenadas esféricas, utilizando la notación introducida en (12) y (18), con el propósito de expresar la región de la Hiperlúnula en los términos establecidos en la Definición 5.

Siendo el cambio de coordenadas:

$$\omega_1 = \rho \sin \psi_2 \cos \psi_1, \omega_2 = \rho \sin \psi_2 \sin \psi_1, \omega_3 = \rho \cos \psi_2 \quad (32)$$

Teniendo el Jacobiano asociado:

$$J(\rho, \psi_1, \psi_2) = \rho^2 \sin \psi_1 \quad (33)$$

Cabe señalar que, al trabajar en coordenadas esféricas, la proyección de la intersección (30) corresponde a una circunferencia completa, por lo que el ángulo asociado ψ_1 recorre el intervalo $[0, 2\pi]$. (Véase la Figura 5)

$$0 \leq \psi_1 \leq 2\pi \quad (34)$$

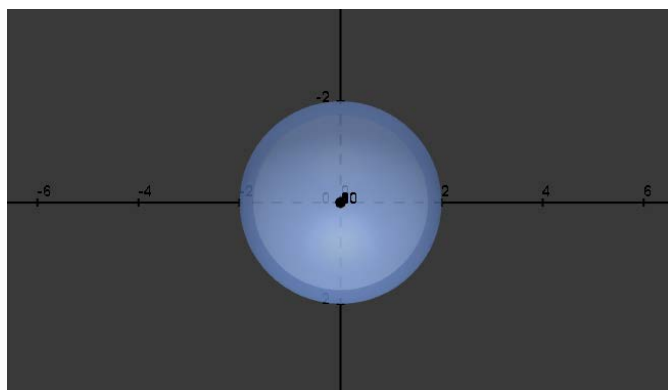


Fig. 5 Vista de corte de las dos esferas, que permite apreciar la circunferencia de intersección y la delimitación de las regiones hiperlúnulares.

Para el siguiente ángulo ψ_2 , se efectuará el cambio de variable indicado en (32) dentro de la expresión de S_1 desarrollada (28). Dado que S_1 es la esfera que contiene internamente a la hiperlúnula, y que ρ representa el radio vector trazado desde el centro de S_2 hasta su casquete, resulta necesario determinar el intervalo angular que dicho radio vector recorre.

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - 4\omega_3 = 0 \quad (35)$$

A partir de (32), y tras efectuar los cambios correspondientes, se obtiene la expresión clásica de las coordenadas esféricas:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \rho^2 \quad (36)$$

Sustituyendo (36) en (35) la expresión se reduce a:

$$\rho^2 - 4\rho \cos \psi_2 = 0 \Rightarrow \rho(\rho - 4\cos \psi_2) = 0 \quad (37)$$

De lo anterior se concluye que el parámetro de entrada es $\rho = 0$ y el parámetro de salida es $\rho = 4\cos \psi_2$. No obstante, debido a la configuración geométrica de este problema (véase la Figura 6), se descarta el valor $\rho = 0$, quedando el intervalo de ρ :

$$2 \leq \rho \leq 4\cos \psi_2 \quad (38)$$

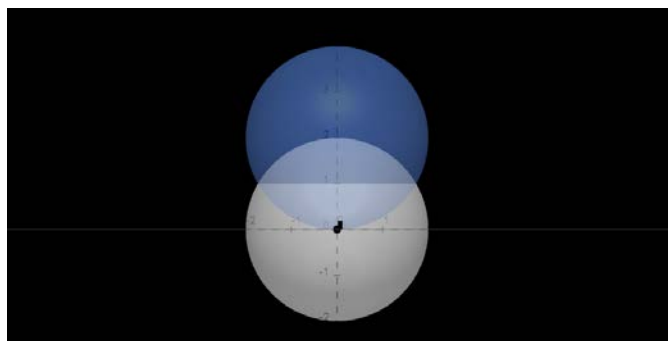


Fig. 6 Vista de conveniencia utilizada para facilitar la comprensión del procedimiento de resolución del problema.

A partir de (38), y aplicando el método que se considere más adecuado para determinar el recorrido del ángulo ψ_2 , se obtiene directamente su intervalo correspondiente.

$$0 \leq \psi_2 \leq \frac{\pi}{3} \quad (39)$$

Se procede ahora a definir el dominio de la hiperlúnula en \mathbb{R}^3 .

$$\Omega = \{(\rho, \psi_1, \psi_2) \in \mathbb{R}^3: 2 \leq \rho \leq 4\cos \psi_2, 0 \leq \psi_1 \leq 2\pi, 0 \leq \psi_2 \leq \frac{\pi}{3}\} \quad (40)$$

A partir de (20) se introduce el diferencial $d\Psi$:

$$d\Psi = \rho^2 \sin \psi_1 d\rho d\psi_2 d\psi_1, \quad (41)$$

Considerando los cambios de variables establecidos en (32), el diferencial denotado en (41) y el dominio descrito en (40), la integral adquiere su forma explícita, correspondiendo precisamente al enunciado del Teorema de las hiperlúnulas.

$$V_L^{(3)} = \int_{\Omega} d\Psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_2^{4\cos \psi_2} \rho^2 \sin \psi_1 d\rho d\psi_2 d\psi_1 \quad (42)$$

La integración radial se realiza de forma directa, produciendo una expresión polinómica en $\cos \psi_2$, mientras que la integración angular aprovecha la simetría del dominio y la separabilidad del factor $\sin \psi_1$. El procedimiento es elemental, aunque algebraicamente extenso, por lo que se omiten aquí los detalles intermedios.

El resultado final conduce al volumen hiperlúnular:

$$V_L^{(n)} = \frac{22\pi}{3} u^3 \quad (43)$$

Este teorema guarda plena concordancia con el método clásico de cambio de variables en coordenadas esféricas cuando se trabaja en \mathbb{R}^3 . [6] El hecho de que en tres dimensiones se recupere la formulación tradicional constituye un indicador de validez, el cual, bajo el cambio de coordenadas propuesto en este trabajo, coincide con el caso de coordenadas esféricas clásicas. En consecuencia, el teorema se establece como un resultado consistente en baja dimensión y, al mismo tiempo, como una formulación robusta que admite su extensión natural a espacios de dimensión arbitraria.

IX. COROLARIO

Con el propósito de reforzar la validez del Teorema de las hiperlúnulas y mostrar su coherencia con los casos particulares previamente conocidos, se enuncia a continuación un corolario en dimensión reducida.

Corolario 1 (Teorema de unificación integral en \mathbb{R}^2 con cambio de coordenadas).

El Teorema de las hiperlúnulas admite como caso particular la dimensión bidimensional, en la cual la región Hiperlúnular se reduce a una lúnula clásica en el plano.

$$A_L = V_L^{(2)} = \int_{\tau} d\Psi \quad (44)$$

Al aplicar el cambio de coordenadas a este caso particular, se observa que la transformación coincide con el cambio a coordenadas polares clásicas en \mathbb{R}^2 . En consecuencia, la formulación general del presente teorema reproduce como caso especial el método previamente desarrollado por el autor para el cálculo integral de lúnulas en el plano, mostrando que dicho procedimiento queda naturalmente integrado dentro del marco n -dimensional establecido aquí.

Corolario 2 (Caso particular del teorema fundador).

Cuando el arco exterior corresponde a una semicircunferencia, la región Λ queda delimitada por la circunferencia principal y la recta que contiene al diámetro de dicha semicircunferencia. En este caso, el resultado del teorema anterior se simplifica a la expresión:

$$A_L = V_L^{(2)} = \pi \frac{[r^2]}{2} - \int_{\Lambda} d\Psi \quad (45)$$

En esta expresión, el primer factor, que originalmente se escribía como $\Delta x^2 + \Delta y^2$, al trabajar con circunferencias se reemplaza de manera explícita $4r^2$, para ajustar la expresión por la justificación planteada en el caso original. El factor restante corresponde a una integral que se desarrolla en el mismo sistema de coordenadas planteado en el Corolario 1. Dicha expresión es equivalente a la formulación obtenida en [1], integrando así el teorema base como una consecuencia natural de la generalización propuesta.

X. CONCLUSIONES

La validez del Teorema de las hiperlúnulas en el cálculo de volúmenes n -dimensionales queda establecida al generalizar, en una sola formulación, los escenarios derivados de intersecciones de esferas en \mathbb{R}^n . Esta extensión unifica rigurosamente los casos particulares estudiados en dimensiones menores, mostrando que bajo cualquier configuración admisible la representación integral converge a una expresión común, lo que asegura su aplicabilidad en contextos arbitrarios.

La consistencia del teorema se fundamenta en el uso preciso de las definiciones, propiedades y teoremas auxiliares presentados en las Secciones III y IV, los cuales garantizan la coherencia lógica del sistema. A su vez, la unicidad de la solución se establece al demostrar que, para cualquier conjunto de datos iniciales, la región Ω conduce de manera inequívoca a la misma representación integral, independientemente de la dimensión considerada.

Un rasgo distintivo de este trabajo, en contraste con resultados previos en \mathbb{R}^2 , es que la formulación actual trasciende el cálculo de la medida bidimensional inducida de lúnulas y se proyecta hacia volúmenes e hipervolúmenes, apoyándose en técnicas de cálculo vectorial y en el uso sistemático de coordenadas esféricas e hiperesféricas. Esto proporciona un procedimiento integral exacto, libre de ambigüedades, que amplía y consolida la línea de investigación previamente iniciada en el plano.

Desde una perspectiva metodológica, el resultado representa un avance significativo en el estudio de configuraciones curvilíneas de alta dimensión, mostrando que el cálculo de volúmenes de hiperlúnulas puede resolverse de manera unificada dentro del formalismo matemático moderno, sin necesidad de recurrir a aproximaciones geométricas externas. Con ello, se sientan las bases para extender el método hacia otras intersecciones de cuerpos curvos en espacios de mayor dimensión, consolidando un marco teórico general caracterizado por rigor, precisión y elegancia.

En consecuencia, el teorema aquí presentado no solo garantiza consistencia y unicidad, sino que también ofrece un sistema flexible de aplicación, capaz de recuperar casos particulares en dimensiones menores y proyectarse hacia dimensiones arbitrarias. Así, se constituye como una

formulación integral definitiva para el cálculo de volúmenes n -dimensionales de hiperlúnulas.

REFERENCIAS

- [1] Ornelas Tapia, J.J., 2025. *Teorema Para El Cálculo General De Áreas De Lúnulas Con Arco Exterior Igual A Una Semicircunferencia Mediante Geometría Integral*. Journal De Objetos Y Objetivos Matemáticos (JOOM), No. 12, pp. 14–22.
- [2] Apostol, T. M. (1974) *Mathematical analysis*. 2nd edn. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [3] Folland, G.B., 1999. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed. New York: Wiley.
- [4] Berger, M., 1987. *Geometry I*, Berlin: Springer-Verlag.
- [5] Riemann, B., 1854. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Göttingen: Dieterichsche Buchhandlung.
- [6] Sáenz, J. (2013) *Cálculo vectorial*. 1ª edn. Barquisimeto, Venezuela: Editorial Hipotenusa, C. A.
- [7] Stewart, J. (2016) *Calculus: Early transcendentals*. 8th edn. Boston, MA: Cengage Learning.
- [8] Marsden, J. E. and Tromba, A. J. (2012) *Vector calculus*. 6th edn. New York, NY: W. H. Freeman and Company.
- [9] do Carmo, M. P. (1992) *Riemannian geometry*. Boston, MA: Birkhäuser.
- [10] Ahlfors, L. V. (1986) *Lectures on quasiconformal mappings*. 2nd edn. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [11] Wiener, N. (1958) *Nonlinear problems in random theory*. Cambridge, MA: MIT Press.

Teorema de unificación integral en la medida bidimensional de lúnulas

Jonathan Josue Ornelas Tapia

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México, México.

ornelas.tapia.jonathan@gmail.com <https://orcid.org/0009-0004-6497-2017>

Resumen- En este trabajo se presenta un teorema generalizado para el cálculo integral de la medida bidimensional de lúnulas en \mathbb{R}^2 . La construcción se fundamenta en un procedimiento de barridos geométricos y en el empleo de herramientas de cálculo vectorial, lo que permite unificar en una sola formulación los tres escenarios posibles: regiones sin subdivisión, con subdivisión en dos partes y con subdivisión en tres. Con ello se superan las restricciones tradicionales impuestas sobre el arco exterior de la lúnula y se amplía el resultado de un teorema previo limitado al caso de la semicircunferencia. Se establecen la unicidad y consistencia del teorema, garantizando su validez en un amplio rango de configuraciones geométricas, y se presentan además corolarios que simplifican su aplicación en casos particulares, incluyendo el problema clásico de Hipócrates.

Palabras Clave- cálculo vectorial, barridos geométricos, lúnulas, áreas en \mathbb{R}^2 , teorema, geometría integral.

Abstract- This work presents a generalized theorem for the integral computation of the bidimensional measure of lunes in \mathbb{R}^2 . The construction relies on a geometric sweeping procedure and the use of vector calculus tools, allowing the unification of three possible scenarios: regions without subdivision, regions subdivided into two parts, and regions subdivided into three. In this way, the classical restrictions imposed on the outer arc of the lune are overcome, extending a previous theorem restricted to the semicircular case. The uniqueness and consistency of the theorem are established, ensuring its validity across a wide range of geometric configurations. Furthermore, corollaries are presented that simplify its application in particular cases, including the classical problem of Hippocrates.

Keywords- vector calculus, geometric sweeps, lunules, areas in \mathbb{R}^2 , theorem, integral geometry.

Mathematical Subject Classification: 51M04, 26B15, 28A25, 52A38.

semicircular de diámetro igual a $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ y una adición de funcionales de áreas concretas, la medida plana puede expresarse mediante la ecuación:

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - 2 \left[\sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} F_k(x) dx \right] \quad (1)$$

Dicho resultado constituyó un avance importante al sistematizar el procedimiento de cálculo en un caso particular, pero presentó restricciones inherentes a la forma de los arcos que definían la lúnula. Estas limitaciones evidenciaron la necesidad de un marco más general que no dependiera de condiciones específicas, abriendo la posibilidad de formular un método aplicable a configuraciones más diversas.

En este sentido, el presente artículo introduce un teorema generalizado para el cálculo integral en el cálculo de la medida bidimensional de lúnulas en \mathbb{R}^2 . Para su desarrollo se construye un algoritmo basado en técnicas de barridos y en el uso de herramientas propias del cálculo vectorial, lo que asegura la aplicabilidad del método sin restringirse a una configuración particular de los arcos. Asimismo, se demuestra la unicidad del algoritmo propuesto y se establece una formulación que garantiza consistencia en contextos geométricos diversos. Con ello, se amplía el marco teórico disponible para el estudio de figuras delimitadas por arcos de circunferencia, ofreciendo un resultado de carácter general y de mayor alcance que el previamente obtenido.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las lúnulas ha ocupado un lugar significativo dentro de la geometría desde la Antigüedad, particularmente a partir de los trabajos de Hipócrates de Quíos, quien exploró la posibilidad de cuadrar figuras curvilíneas mediante construcciones geométricas. Con el desarrollo del cálculo integral y del análisis vectorial, el interés en estas figuras ha resurgido en el ámbito contemporáneo, no solo por su valor histórico, sino también como un terreno fértil para explorar métodos generales de integración sobre dominios limitados por arcos de circunferencia.

En un trabajo previo se formula un teorema para el cálculo general de áreas de lúnulas con arco exterior igual a una semicircunferencia mediante geometría integral [1]. Allí se estableció, que si la lúnula estaba delimitada por un arco

II. PROPIEDADES Y TEOREMAS AUXILIARES

A continuación, se presentan herramientas fundamentales que servirán como soporte para la formulación del teorema, garantizando su consistencia interna y la unicidad de su enunciado.

Propiedad (Prop.) 1.- Linealidad de la integral [2]:

Sean $f, g: R \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\iint_R (af(x, y) + bg(x, y)) dA = a \iint_R f(x, y) dA + b \iint_R g(x, y) dA \quad (2)$$

Prop. 2.- Propiedad dominante (criterio de comparación) [3]:

Si $f, g: R \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles y se cumple que:

$$|f(x, y)| \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in R \quad (3)$$

Donde g es integrable en Ω , entonces f también es integrable en R y se cumple:

$$\left| \iint_R f(x, y) dA \right| \leq \iint_R g(x, y) dA \quad (4)$$

Prop. 3.- Subdivisión del dominio [4]:

Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ una región que puede expresarse como unión disjunta de subregiones medibles $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$. Si f es integrable en R , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA + \dots + \iint_{R_n} f(x, y) dA \quad (5)$$

Teorema (Teo.) 1.- Teorema de Fubini [5]:

Sean $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ continua en una región de tipo I o de tipo II.

Si R es de tipo I:

$$R = \{(x, y) | g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\}$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (6)$$

Si R es de tipo II:

$$R = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (7)$$

III. TEOREMA [1]

Sea una lúnula delimitada por dos arcos de circunferencia en el plano \mathbb{R}^2 . Entonces, la medida bidimensional de la lúnula puede calcularse mediante las siguientes expresiones:

Para una región de Tipo I sin subdivisión de su dominio:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | C_1(x) \leq y \leq C_2(x); \rho_1 \leq x \leq \rho_2\}$$

$$A_L = \iint_{\Omega} dA \quad \square \quad (8)$$

Para una región de Tipo II sin subdivisión de su dominio:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | C_1(y) \leq x \leq C_2(y); \rho_1 \leq y \leq \rho_2\}$$

$$A_L = \iint_{\Omega} dA \quad \square \quad (9)$$

Para una región de Tipo I o II con subdivisión de su dominio:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset (i \neq j)$$

$$A_L = \iint_{\Omega} dA = \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_k} dA \quad (10)$$

IV. DEMOSTRACIÓN

Sean C_1, C_2 circunferencias que se intersecan en un par de puntos. Denoto por C_1 la curva que delimita el espacio geométrico donde inicio el barrido, y por C_2 aquella donde dicho proceso concluye. Posteriormente, designo por ρ_1 y ρ_2 los límites numéricos de integración asociados a la región encerrada.

Se concibe a la lúnula como la región formada por dos circunferencias, donde una permanece fija mientras la otra se traslada a lo largo de su contorno, generando así infinitas configuraciones posibles. No obstante, es suficiente destacar tres casos principales, los cuales permiten obtener un panorama completo del problema.

Caso I (Regiones sin subdivisión del dominio):

Sea el caso en el cual la configuración de posiciones de ambas circunferencias permite describir a la región Ω como una sola entidad sin necesidad de subdivisión como se ilustra en la Figura 1.

En particular, si se trabaja con una región de tipo I, Ω está acotada por los arcos C_1 y C_2 , con límites de integración en el eje correspondiente dados por ρ_1 y ρ_2 .

En consecuencia, de acuerdo con el Teorema 1 enunciado en la sección III, la región Ω se describe mediante la siguiente formulación integral para una región de tipo I:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | C_1(x) \leq y \leq C_2(x); \rho_1 \leq x \leq \rho_2\}$$

Análogamente la formulación integral para una región de tipo II:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | C_1(y) \leq x \leq C_2(y); \rho_1 \leq y \leq \rho_2\}$$

Siendo A_L el funcional de área de la lúnula.

$$A_L = \iint_{\Omega} dA \quad \square \quad (11)$$

Caso II (Regiones con subdivisión en dos partes del dominio):

Sea el caso en el cual la configuración de las circunferencias obliga a descomponer la región Ω en dos subregiones, de modo que cada una pueda expresarse adecuadamente como región de tipo I o de tipo II, según se muestra en la Figura 2.

En este escenario, la Propiedad 3 garantiza que:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2; \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset (i \neq j)$$

$$A_L = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega_1} dA + \iint_{\Omega_2} dA \quad \square \quad (12)$$

Siendo A_L la expresión para calcular la medida bidimensional de la lúnula.

En particular, la subdivisión surge debido a que los arcos C_1 y C_2 intercambian sus roles como límite superior o inferior (o

izquierdo y derecho) a lo largo del dominio, generando un punto de transición natural que exige la partición.

Caso III (Regiones con subdivisión en tres partes del dominio):

Este caso constituye una extensión del Caso II, en el que la región Ω requiere descomponerse en tres subregiones en lugar de dos. La necesidad de esta subdivisión adicional surge de la interacción geométrica de los arcos C_1 y C_2 , lo que impide describir Ω como una única región de tipo I o II. Véase la Figura 3.

Así, aplicando la Propiedad 3, se obtiene:

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3; \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset (i \neq j)$$

$$A_L = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega_1} dA + \iint_{\Omega_2} dA + \iint_{\Omega_3} dA \quad \square (13)$$

Reunidos los resultados de los tres casos analizados, se observa que todos pueden integrarse en una única formulación general. En efecto, independientemente de que la región Ω se describa sin subdivisión, o bien como la unión de dos o tres subregiones, la medida plana de la lúnula queda determinada por la misma expresión integral.

De este modo, se establece la ecuación final del Teorema, la cual unifica y generaliza los distintos escenarios considerados:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset (i \neq j)$$

$$A_L = \iint_{\Omega} dA = \sum_{k=1}^n \iint_{\Omega_k} dA \quad \blacksquare$$

Donde $k \in \mathbb{N}$ es un índice de enumeración que recorre las subregiones disjuntas Ω_k , con $1 \leq k \leq n$, y donde $n \in \{1,2,3\}$ corresponde al número de subregiones en cada uno de los casos analizados.

V. COROLARIO

Corolario 1 (Expresión alternativa del área de la lúnula).

El funcional de área de la lúnula delimitada por los arcos C_1 y C_2 , puede calcularse de manera equivalente mediante la siguiente expresión:

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{4} - \sum_{k=1}^n \iint_{\Psi_k} dA \quad (14)$$

El razonamiento se basa en observar que la lúnula puede interpretarse como el área de una circunferencia completa menos la sección determinada por la intersección de ambas circunferencias. En consecuencia, dicha diferencia conduce de manera directa al funcional de área buscada.

Corolario 2 (Caso particular del teorema previo).

Cuando el arco exterior corresponde a una semicircunferencia, y empleando el razonamiento del Corolario 1, la región Λ queda delimitada por la circunferencia principal y el diámetro de la semicircunferencia. En este caso, el resultado del Teorema previo se simplifica a la expresión:

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - \sum_{k=1}^n \iint_{\Lambda_k} dA \quad (15)$$

Dicha expresión coincide con la formulación obtenida en [1], integrando así el teorema previo como consecuencia natural de la generalización actual.

VI. ESCOLIO

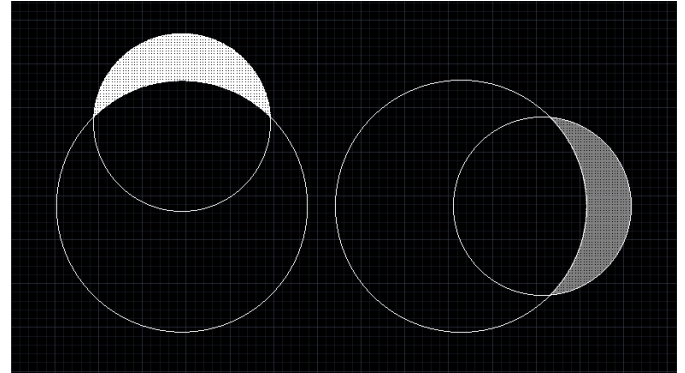


Fig. 1 Esquema ilustrativo del Caso I, donde la región se describe como un único dominio sin necesidad de subdivisiones.

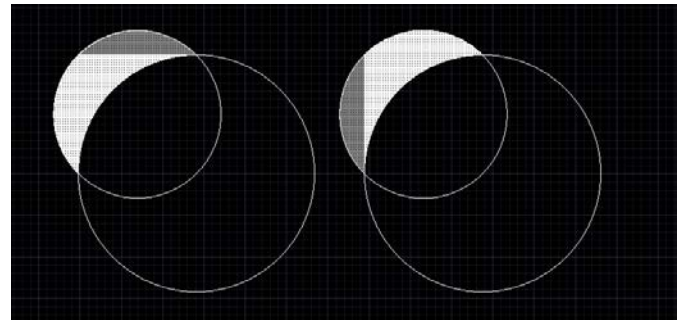


Fig. 2. Esquema ilustrativo del Caso II, en el cual la región debe descomponerse en dos subregiones para ser representada como región de tipo I o tipo II.

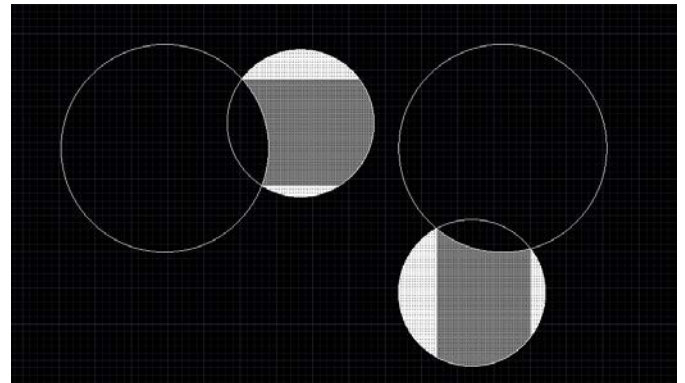


Fig. 3. Esquema ilustrativo del Caso III, donde la región se subdivide en tres partes, requiriendo un tratamiento integral más general.

VII. PROBLEMA DE LÚNULA EN \mathbb{R}^2

Con el propósito de ilustrar la aplicabilidad del teorema desarrollado, presento a continuación un problema clásico de la geometría: el cálculo de la medida bidimensional de una lúnula atribuida a Hipócrates de Quíos.

Enunciado. Calcula la funcional del área de la lúnula formada por la arista de un polígono regular de 4 aristas circunscrito a una circunferencia de centro $(3,0)$ y radio de $2u$ y delimitado superiormente por una semicircunferencia. Como se muestra en la Figura 4.

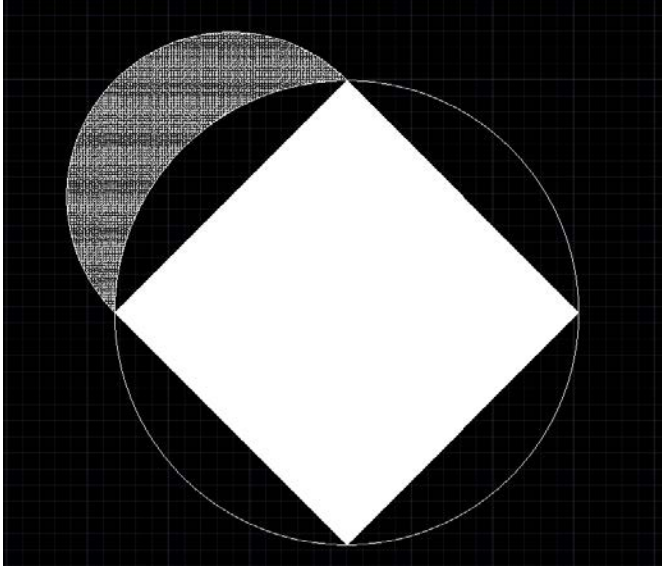


Fig. 4. Ilustración esquemática del problema planteado.

Denoto como C_1 a la circunferencia mayor con centro $O_1 = (3,0)$ y radio de $2u$, y por C_2 a la semicircunferencia cuyo diámetro corresponde a la arista del polígono inscrito en C_1 .

Expreso a C_1 y a C_2 mediante sus respectivas ecuaciones analíticas, siendo:

$$C_1: (x-3)^2 + (y)^2 = 4 \quad (16)$$

$$C_2: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad (17)$$

Determino que, por la configuración geométrica de la lúnula, resulta indiferente trabajar con una región de tipo I o de tipo II, dado que en ambos casos no es posible describir la medida bidimensional completa como una única región sin subdivisiones. Para efectos del desarrollo, opto por trabajar con una región de tipo II. Defino entonces:

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2; \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_2(y) \leq x \leq h_1(y); \rho_1 \leq y \leq \rho_2\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_2(y) \leq x \leq h_2(y); \rho_2 \leq y \leq \rho_3\},$$

Donde $h_1(y)$ y $h_2(y)$ representan las fronteras inducidas por los arcos C_1 y C_2 , y ρ_1, ρ_2, ρ_3 , son los límites numéricos de integración en el eje y .

La expresión para el cálculo de la región por la integral viene dada por:

$$A_L = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega_1} dA + \iint_{\Omega_2} dA \quad (18)$$

Y su expresión explícita:

$$A_L = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{h_2(y)}^{h_1(y)} dx \right) dy + \int_{\rho_2}^{\rho_3} \left(\int_{h_2(y)}^{h_2(y)} dx \right) dy \quad (19)$$

De 16 y 17 se obtiene h_1 y h_2 :

$$h_1(y) = \pm\sqrt{4-y^2} + 3 \quad (20)$$

$$h_2(y) = \pm\sqrt{2-(y-1)^2} + 2 \quad (21)$$

Los valores de los límites numéricos de integración dados por ρ_1, ρ_2, ρ_3 , en este caso particular se determinan a partir de la intersección de los arcos C_1 y C_2 (para ρ_1 y ρ_2) y del punto más alto de la circunferencia C_2 (para ρ_3). Existen diversos procedimientos para calcularlos; sin embargo, dado que todos conducen al mismo resultado y no constituyen el foco del presente trabajo, omito su desarrollo detallado y me limito a señalar directamente el intervalo de integración correspondiente.

El dominio de la región queda definido por

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2-(y-1)^2} + 2 \leq x \leq -\sqrt{4-y^2} + 3; 0 \leq y \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2-(y-1)^2} + 2 \leq x \leq \sqrt{2-(y-1)^2} + 2; 2 \leq y \leq 1 + \sqrt{2}\},$$

y la expresión para el cálculo de su medida plana viene dada por:

$$A_L = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2-(y-1)^2}+2}^{-\sqrt{4-y^2}+3} dx \right) dy + \int_2^{1+\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-(y-1)^2}+2}^{\sqrt{2-(y-1)^2}+2} dx \right) dy \quad (22)$$

Finalmente, al resolver esta formulación se obtiene que el valor de la integral sobre la región de la lúnula es de $2u^2$.

En este caso particular, la medida bidimensional obtenida para la lúnula coincide con la del triángulo rectángulo formado por la arista del polígono y las perpendiculares trazadas desde sus extremos hasta el centro de la circunferencia C_1 . Este hecho es consistente con el teorema clásico de las lúnulas de Hipócrates, según el cual determinadas lúnulas poseen una medida plana exactamente igual a la de un triángulo rectángulo construido a partir de los radios de la circunferencia. Así, el resultado obtenido no solo valida el procedimiento integral aplicado, sino que también establece un puente entre el enfoque moderno de cálculo y la tradición geométrica clásica.

Alternativamente, al aplicar directamente el Corolario 2 considerando una región de tipo I, el funcional de área de la lúnula se obtiene mediante la expresión:

$$\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-1 \leq y \leq \sqrt{4-(x-3)^2}; 1 \leq y \leq 3\}$$

$$A_L = \pi \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}{8} - \sum_{k=1}^n \iint_{\Lambda_k} dA \quad (23)$$

Al resolver esta formulación bajo el planteamiento de región de tipo I, se obtiene directamente el valor de la medida plana, resultando en $2u^2$, este resultado confirma la consistencia entre el método integral desarrollado previamente y la expresión simplificada derivada del corolario.

Cabe destacar que la elección del procedimiento para calcular el funcional de área de una lúnula ya sea mediante el teorema general propuesto en este trabajo, el teorema formulado previamente, o bien a través de los corolarios aquí establecidos depende en gran medida de la naturaleza del problema, la complejidad geométrica de la configuración considerada y la conveniencia técnica de cada caso. De este modo, el marco teórico construido ofrece diversas rutas de solución, todas ellas rigurosas, cuya selección final responde al criterio matemático más adecuado para el contexto específico.

VIII. CONCLUSIONES

La validez del Teorema de unificación integral en el cálculo de los funcionales de áreas de lúnulas queda establecida al unificar en una sola formulación los tres escenarios posibles: regiones sin subdivisión, con subdivisión en dos partes y con subdivisión en tres. Esta clasificación exhaustiva demuestra que, bajo cualquier configuración de arcos de circunferencia que conformen la lúnula, el cálculo integral converge a una expresión común, garantizando así su aplicabilidad general.

La consistencia del teorema se respalda en el uso riguroso de las propiedades fundamentales enunciadas en la Sección III, que aseguran la coherencia lógica interna del sistema. Asimismo, la unicidad de la solución se establece a partir de la demostración de que, para cualquier conjunto de datos admisibles, la región Ω conduce de manera inequívoca a la misma representación integral, independientemente del tipo de subdivisión empleada.

Un aspecto distintivo de este trabajo, frente a mi teorema previo limitado al caso en que el arco exterior fuese una semicircunferencia, radica en que el presente desarrollo elimina dicha restricción y amplía el resultado hacia configuraciones arbitrarias de arcos. Además, mientras que en el enfoque anterior la implementación práctica estaba sujeta a un margen de estabilidad numérica limitada, en esta formulación los barridos verticales y horizontales permiten un procedimiento exacto, libre de errores de cuantización.

La introducción de los corolarios complementa este marco teórico al proporcionar vías alternativas y simplificadas de resolución en casos particulares, como quedó demostrado en la aplicación al problema clásico de Hipócrates. De esta manera, el trabajo no solo confirma la validez del resultado general, sino que también exhibe su capacidad de recuperar soluciones históricas y de ofrecer procedimientos más eficientes cuando la configuración geométrica lo permite.

Desde una perspectiva metodológica, el resultado constituye un avance significativo en el estudio de las lúnulas: muestra que el cálculo de sus medidas bidimensionales puede resolverse íntegramente dentro del formalismo matemático moderno, sin recurrir a aproximaciones ni a instrumentos geométricos clásicos. Con ello, se sienta una base sólida para la extensión del método hacia otras configuraciones curvilíneas de interés, consolidando un marco teórico general que integra rigor, precisión y elegancia.

De este modo, el teorema aquí presentado no solo garantiza rigor, consistencia y unicidad, sino que además ofrece un sistema flexible de métodos ya sea mediante el resultado general, su antecedente particular o los corolarios derivados, consolidándose como una formulación integral definitiva para el cálculo de la medida bidimensional de lúnulas.

REFERENCIAS

- [1] Ornelas Tapia, J.J., 2025. Teorema Para El Cálculo General De Áreas De Lúnulas Con Arco Exterior Igual A Una Semicircunferencia Mediante Geometría Integral. *Journal De Objetos Y Objetivos Matemáticos (JOOM)*, No. 12, pp. 14–22.
- [2] Apostol, T.M. (1967). *Calculus, Vol. II*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.
- [3] Bartle, R.G. and Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. 4th ed. Hoboken: John Wiley & Sons.
- [4] Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals*. 8th ed. Boston: Cengage Learning.
- [5] Folland, G. B. (1999) *Real analysis: Modern techniques and their applications*. 2nd edn. New York, NY: John Wiley & Sons.
- [6] Sáenz, J. (2013) *Cálculo vectorial*. 1ª edn. Barquisimeto, Venezuela: Editorial Hipotenusa, C. A.
- [7] Stewart, J. (2016) *Calculus: Early transcendentals*. 8th edn. Boston, MA: Cengage Learning.
- [8] Marsden, J. E. and Tromba, A. J. (2012) *Vector calculus*. 6th edn. New York, NY: W. H. Freeman and Company.

Modelo matemático y simulación del colapso formal SLE-GRW como una función mediante el axioma de elección para familias infinitas contables de estados cuánticos discretos (CIFDQS).

Marcos Fajardo Rendón

Secretaría de Educación Pública, Av. Universidad 1200, Xoco, Benito Juárez, 03330 Ciudad de México, México

marcos.fajardor@aeefcm.gob.mx <https://orcid.org/0000-0003-1438-3519>

Resumen- En el presente artículo propone la axiomatización del modelo de colapso formal GRW (Ghirardi-Rimini-Weber) de SLE (spontaneous localization events) mediante el concepto de familias infinitas contables de estados cuánticos discretos (CIFDQS) como una función de elección utilizando el axioma de elección de Zermelo-Fraenkel; así mismo se realiza una simulación del modelo matemático en QISKIT.

Palabras Clave- colapso formal, axioma de elección, SLE, GRW, CIFDQS.

Abstract- In this article the axiomatization of the GRW (Ghirardi-Rimini-Weber) formal collapse model of SLE (spontaneous localization events) is proposed using the concept of countably infinite families of discrete quantum states (CIFDQS) as a choice function using the Zermelo-Fraenkel choice axiom; also a simulation of the mathematical model is developed in QISKIT.

Keywords- mathematical modeling, formal collapse, axiom of choice, SLE GRW, CIFDQS.

Аннотация- В данной статье предлагается аксиоматизация формальной модели коллапса GRW (Ghirardi-Rimini-Weber) SLE (спонтанных локализационных событий) с использованием концепции счетных бесконечных семейств дискретных квантовых состояний (CIFDQS) в качестве функции выбора с использованием аксиомы выбора Цермело-Френкеля; также разработана симуляция математической модели в QISKIT..

Лучевые Слова- математическое моделирование, формальный коллапс, аксиома выбора, SLE GRW, CIFDQS.
Mathematical Subject Classification: 81Pxx, 03E25, 81-10, 81S25.

I. INTRODUCCIÓN

La banda de rock progresivo Rush en su tema "Freewill" del disco *Permanent Waves* de 1980 menciona: "You can choose not to decide, but still you have made a choice." indicando que un principio inmutable de la existencia es la elección independientemente de que no se lleve a cabo la misma, por lo que es inevitable hacer una elección entre infinitas posibilidades numerables. Lo anterior coincide con el padre del existencialismo Søren Aabye Kierkegaard en su obra *Either/Or* en donde indica que: "Choose! That is the essence of existence."; por lo que la existencia genera la regla de selección y esta termina en un estado del universo cuántico formal (medible) denominado "colapso" -a diferencia de la sociología, en la que es una idea no medible-, que coincide con las discusiones de Niels Bohr con Wheeler donde indica el

primero que: "No phenomenon is a phenomenon until it is an observed phenomenon" [1].

Para la RAE la elección es una selección o preferencia entre varias opciones [2] y como se ha mencionado es un proceso propio de la existencia, física cuántica y del pensamiento abstracto de las matemáticas que ha sido abordado por diversos filósofos como parte de la naturaleza.

El presente artículo propone adapta y moderniza el AC o *Axiom of Choice* (Axioma de Elección) [3] [4] [5] de E. Zermelo y A. Fraenkel (ZFC) para una familia infinita (pero numerable) de estados cuánticos discretos elegibles sobre modelos físicos de colapso cuántico objetivo del tipo GRW (Ghirardi-Rimini-Weber) [6].

El trabajo aborda el concepto de "colapso cuántico objetivo GRW" [6] como un postulado de elección físico en donde se realiza una transición de un conjunto (finito o infinito de estados cuánticos) a un único estado.

La premisa matemática de trabajo es abordar colapso cuántico objetivo [6] como una función de elección sobre una familia infinita de estados cuánticos discretos que exista bajo el principio del axioma de elección (AC) [3] [4] [5] que selecciona un elemento de cada conjunto $A \neq \emptyset$.

El modelo permite describir los cambios de estados estocásticos y las localizaciones espontáneas cuánticas se observan como una operación de elección sobre el AC en donde mediante la superposición de una familia infinita de estados discretos posibles, uno es elegido y se convierte en la realidad del observador.

Así mismo el trabajo intenta aplicar y demostrar (al menos en una escala computable pequeña) mediante una simulación del modelo como una función de elección en una familia de estados discretos que transita estados hacia un "colapso" basado en la teoría GRW [6], con lo que se obtiene una lectura en un contexto virtual.

Con lo anterior el trabajo permite conectar las elecciones con el colapso estocástico que puedan generar nuevos modelos de colapso cuántico, o ser abordado desde las teorías de información cuántica para el determinismo de LLMs o *Large Language Models* (Grandes Modelos de Lenguaje) para chatbots.

II. AXIOMA DE ELECCIÓN (CA).

El Axioma de Elección (AC) surge en 1904 con el trabajo original de E. Zermelo en *Mathematische Annalen*, Vol. 59, en la página 516 en donde indica que: “*Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*” [3], el cual es una carta para Hilbert denominada “*Demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado*” en donde proponía una solución al trabajo de 1895 en teoría de conjuntos de Cantor “*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I*” (Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos I”) [7] y el trabajo de 1902 de Hilbert “*Mathematical Problems*” (Problemas Matemáticos) [8].

Respetando la terminología original de Zermelo [3] en su primer trabajo del AC de 1904, no se describe un “*axioma de elección*” como notación; si no como un intento de demostrar que con base en el principio de que los “*recubrimientos*” (conjuntos de subconjuntos o “*familias de subconjuntos*”) que existen para la “*totalidad infinita de conjuntos*” (conjuntos finitos o infinitos), siempre hay “*mapeos*” (mapeo, función, morfismo, aplicación, u operador funcional son sinónimos según el contexto [9]) que permiten elegir para cada conjunto, uno de sus elementos de acuerdo a las definiciones 1 y 3 de Zermelo [3]:

- 1) Sea M un conjunto arbitrario de cardinalidad m , y sea m un elemento arbitrario de este.
Sea M' de cardinalidad m' un subconjunto de M que contiene al menos un elemento que contiene al menos un elemento m , pudiendo contener todos los elementos de M .
Sea $M - M'$ un subconjunto “*complementario*” [3] de M' ; dos subconjuntos serán distintos si uno de ellos contiene algún elemento que no aparece en el otro y sea M el conjunto de todos los subconjuntos M' .
- 3) Un conjunto Y es cualquier conjunto M_Y “*bien ordenado*” [3] que consiste enteramente de elementos de M con la propiedad de que siempre que $a \in M_Y$ sea un elemento arbitrario; A será el segmento “*asociado*” formado por los elementos $x \in M$ donde: $x < a; a \neq M - A$.

Junto a la siguiente propiedad:

Sea un conjunto Y que perteneció en un momento t_1 a $M - L_Y$ que en:

$$\exists_{t_0}(m) \in M \notin Y \rightarrow \exists_{t_1}(m'_1) \in M - L_Y.$$

Donde también existe el conjunto ordenado:

$(L_Y, m'_1) \mid \forall (y \in Y) < m'_1$ de acuerdo a la definición 3 de Zermelo será un conjunto Y ; por lo tanto $m' \in Y$; contrario a lo que se supone y $L_Y = M$; siendo M un conjunto con “*buen orden*” [3].

En consecuencia a cada “*recubrimiento*” le corresponderá un “*buen orden*” [3] definido por el conjunto M ; aún si el “*buen orden*” [3] de dos “*recubrimientos*” distintos no siempre son distintos. En cualquier caso, debe existir al menos un “*buen orden*” [3] de este tipo y todo conjunto para el cual la totalidad de

subconjuntos, etc., sea significativa puede considerarse con “*buen orden*” [3] y su cardinalidad como un (número) “*aleph*” [3] (una secuencia de números que representan la cardinalidad o tamaño de conjuntos infinitos); deduciendo que, para cada cardinalidad transfinita se cumple:

$$m = 2m = N_0 m = m^2$$

Y así sucesivamente; por lo que dos conjuntos cualesquiera son “*comparables*”; es decir, uno de ellos siempre puede ser “*mapeado*” (función [9]) uno a uno sobre el otro o sobre una de sus partes; intentando probar que:

“*Der vorliegende Beweis beruht auf der Voraussetzung, daß Belegungen y überhaupt existieren, also auf dem Prinzip, daß es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente...*” [3]; es decir: “*La presente prueba se basa en el supuesto de que las asignaciones existen; es decir, en el principio de que incluso para un conjunto infinito de conjuntos siempre hay asignaciones en las que a cada conjunto se le asigna uno de sus elementos...*” [3].

Posteriormente en su trabajo de 1908 dentro del *Mathematische Annalen*, Vol. 65, en la página 266 Zermelo lo estructura como axioma indicando que: “*Axiom VI. Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von 0 verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1 welche mit jedem Elemente von T ein und nur ein Element gemein hat.*”

(Axiom der Auswahl.)

Man kann das Axiom auch so ausdrücken. daß man sagt, es sei immer möglich, aus jedem Elemente M, N, R, \dots von T ein einzelnes Element m, n, r, \dots auszuwählen und alle diese Elemente zu einer Menge S_1 zu vereinigen.*”) [4]; es decir:

El axioma VI (de elección) o AC indica que si existe un conjunto T cuyos elementos son todos conjuntos distintos de 0 y mutuamente disjuntos; su unión $\mathfrak{S}T$ ($\cup T$) incluirá al menos un subconjunto S_1 que contenga un solo elemento en común con cada elemento de T ; así mismo el axioma se puede expresar como que siempre es posible elegir un solo elemento de cada elemento: $M, N, R, \dots \in T$ y combinar todos los elementos elegidos: m, n, r, \dots , en un conjunto S_1 .

Además indica que para asegurar la existencia de los conjuntos infinitos, los axiomas anteriores requieren del denominado axioma VII que es el Axioma de la infinitud (Axiom des Unendlichen) esencialmente de Dedekind de 1888 [10].

Zermelo explica la prueba que realiza ese mismo año (1908) en el mismo número de *Mathematische Annalen*, vol. 65, apenas unas páginas antes (pp. 107–128) en su trabajo titulado “*Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*” [11] en donde indica que: “no puede probar el axioma ni que lo acepten apodócticamente”; sin embargo indica que “La imposibilidad de demostrar... no implica la no validez...; ya que a toda prueba le debe presuponer principios no demostrados” comparando que Peano usa principios que no han sido demostrados; así como que el AC ha sido utilizado con anterioridad por otros como Dedekind, Cantor, König, Schoenflies y otros.

Así mismo Zermelo enumera los teoremas que requieren al AC partiendo de la equivalencia entre conjuntos disjuntos

mediante los siguientes teoremas en donde se utilizará la notación moderna de acuerdo a productos cartesianos infinitos, funciones y conjuntos de acuerdo a Bourbaki [12], de modo que cuadre con el trabajo moderno:

Teorema 1 (descomposición) [11]: Si un conjunto M puede descomponerse en partes disjuntas A, B, C, \dots ; entonces se puede determinar una correspondencia de tipo biyectiva a modo: $M - \text{conjunto}$ de índices y de estas partes se requiere elegir exactamente un elemento de cada una de ellas. La existencia de la “función de selección”, f_c que no puede demostrarse sin la existencia previa del AC \square .

Teorema 2 (producto) [11]: Para una familia de conjuntos no vacíos el producto cartesiano con una f_c en donde para cada índice i , se elija un único elemento a_i de cada conjunto A_i de modo:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset \leftrightarrow \exists f_c: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I; f_c(i) \in A_i$$

Que es una versión moderna del AC original \square .

Teorema 3 [11]: Todo conjunto puede ser bien ordenado (*Teorema del buen orden*) [3] [4] [12] que depende de la existencia d previa del AC \square .

Teorema 4 [11]: Dados dos conjuntos A y B ; tienen una cardinalidad: $|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$; por lo que el principio de comparabilidad cardinal requiere la existencia previa de AC \square .

Teorema 5 [11]: Dado un cuerpo K ; un $K - \text{espacio vectorial } V$ tiene una *base de Hamel* [13] H linealmente independiente y con un subespacio H con elementos $h \in H$, escalares $\lambda h \in K$, el conjunto finito $\{h \in H; \lambda h \neq 0\} < \infty$ y $v \in V \mid v = \sum_{h \in H} \lambda_h \cdot h$ de modo que:

$$\forall V \supseteq H \leftrightarrow \begin{cases} H \text{ es linealmente independiente} \\ \forall v \in V \rightarrow \exists [(\lambda_h \cdot h) \subset K] \end{cases}$$

La existencia de dichas bases H requiere la existencia previa de AC, al implicar la selección de representantes para cada clase de equivalencia de la relación lineal \square .

Teorema 6 [11]:

Dada una función suprayectiva $f: [A \rightarrow B]$ y su inversa $f^{-1}: f^{-1}(\{b\}) \mid \{a \in A: f(a) = b\} \rightarrow f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset \mid \forall b \in B$; su inversa por la derecha $g(b)$ será: $g(b) \in f^{-1}(\{b\}) \mid \forall b \in B$ en donde se elige un único elemento de cada uno $g(b)$: $g: B \rightarrow A \mid g(b) \in f^{-1}(\{b\})$; con los elementos anteriores se generaliza que:

$$[\forall f: A \rightarrow B] \rightarrow \exists g: B \rightarrow A \mid f(g(b)) = b; \forall b \in B$$

Por lo que para que toda función suprayectiva con admisión de función inversa por la derecha elija para cada elemento del codominio un elemento correspondiente del dominio, requiere de la existencia de AC \square .

Teorema 7 [11]: Existen soluciones discontinuas de la ecuación funcional aditiva:

$f(x + y) = f(x) + f(y)$; Hamel [13] demostró la existencia de tales soluciones asumiendo que el continuo puede ser bien ordenado requiriendo la existencia de AC. Esta construcción requiere el Axioma de Elección \square .

La existencia de estas soluciones requiere una base de Hamel H [13] de \mathbb{R} como espacio vectorial V sobre \mathbb{Q} cuya construcción requiere la existencia del AC.

Su trabajo termina coincidiendo con Poincaré justificando la necesidad de existencias del AC.

Fraenkel 1922 aborda la independencia del AC [5] del resto de los axiomas propuestos por Zermelo [4] [11] que lo usa como requisito existencial para la demostración del “*buen orden*” y es gracias a su aportación que AC es conocido como Zermelo-Fraenkel (ZFC) [5].

Definición 1.

Frege define los *urelementos* [14] y Fraenkel los usa en su trabajo [5] para demostrar la independencia del AC como objetos del dominio que no tiene elementos y dichos objetos no son conjuntos; sin embargo pueden formar parte de conjuntos \square .

Definición 2.

Fraenkel define *celda* [5] como un par *no-ordenado* de *urelementos* de la forma $\{a_n, b_n\}$ donde:

$$\{a_n, b_n\} \mid \forall celda \rightarrow (A) = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots\} \mid A \rightarrow \text{denumerable} \square.$$

Definición 3.

Fraenkel implícitamente describe un “*sistema generado*” como el menor universo U mediante sus objetos iniciales [5]: $\emptyset, Z0 = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$ y el conjunto de celdas A ; así mismo para todos los conjuntos derivados de la función finita es aplicable cualquiera de los axiomas II–V de Zermelo [11] dentro del universo U de Fraenkel [5] \square .

Definición 4.

La *simetría* es el proceso de permutación entre los dos *urelementos* de una *celda*; el proceso puede dejar invariante a algunos subconjuntos; por lo que no puede existir una función de elección sobre el conjunto de celdas, ya que cualquier elección sería destruida por tal permutación de acuerdo a Fraenkel [5] \square .

Con base en el trabajo previamente comentado de Zermelo y las definiciones anteriores modernizadas en lenguaje por Fraenkel se propone la siguiente descripción moderna para el axioma de elección Zermelo-Fraenkel (AC o ZFC) agregando nuevas definiciones.

Definición 5

De acuerdo a la definición 1 de *urelementos* se considera una familia de *celdas* descrita en la definición 2 de tipo A (definición 3) que trabajará sobre una familia numerable de conjuntos no vacíos $\{C_n\} = \{a_n, b_n\} \mid \forall n \in \mathbb{N}; \{C_n\} \neq \emptyset$ y que de acuerdo a la definición 1 el par $\{a_n, b_n\} \rightarrow \text{urelementos distitnos}; a_n \neq b_n \square$.

Con base en la definición 5 respecto a $\{C_n\}$ y sus *urelementos* $a_n \neq b_n$; una familia A del tipo de la definición 2 será:

$$A = \{Cn: n \in \mathbb{N}\} \quad (1)$$

Definición 6.

Sea I un conjunto índice y utilizando la definición 5 de $\{Cn\}$; una *celda* y usando (1) para una familia de conjuntos $A = (A_i)_{i \in I}$ la *función de elección* f_c (choice function) se define como el universo:

$$f_c: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I; f(i) \in A_i \quad (2)$$

Así mismo:

$$f_c: A \rightarrow \bigcup A \mid f(Cn) \in Cn = \{a_n, b_n\}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

La *función de elección* (2) basada en Fraenkel [5] puede ser modernizada como un producto cartesiano:

$$f_c \in \prod_{i \in I} A_i \quad (4)$$

□

Proposición 1.

Una *función de elección* f_c (2),(4) cumple las características de función moderna al contar con: dominio I , codominio $\bigcup_{i \in I} A_i$, imagen $f_c[I] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ y la regla de correspondencia no ambigua $i \mapsto f_c(i) \mid f_c(i) \in A_i$.

Así mismo satisface las condiciones de unicidad funcional: $(i, x) \in f_c \wedge (i, y) \in f_c \rightarrow x = y$; en donde $f_c(i)$ es el único elemento de A_i emparejado con i □.

Demostración.

Utilizando (4) a modo producto cartesiano donde la función es un subconjunto: $f_c \subseteq I \times \bigcup_{i \in I} A_i$; implica como regla que: $f_c: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ c.

La condición funcional exige la unicidad que de acuerdo a Bourbaki [12] debe cumplir que: $((\forall i \in I), f(i)) \in IA_i$; es decir un único para $(i, f(i) \in f)$; es decir cómo se postuló en la proposición 1: $(i, x) \in f \wedge (i, y) \in f \rightarrow x = y$, con lo cual la *función de elección* f_c (2) (4) cumple con la definición de relación unívoca.

Con respecto al dominio I , dada la función $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$; no puede existir un índice sin valor, ni valores fuera de I .

Por otro lado el codominio se encuentra implícita en un producto cartesiano como el expresado en (2) (3).

La imagen implica que: $f_c(i) \in A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow im(f_c) = f_c[I] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

La regla de correspondencia no ambigua $i \mapsto f_c(i) \mid f_c(i) \in A_i$ contiene el conjunto de pares ordenados: $f_c = \{(i, f_c(i))\} \mid i \in I$ que de acuerdo a lo anterior es una función y no una relación ■.

Demostración 2 (por reducción al absurdo).

No puede existir una *función de elección* de un objeto elegible y que por el contrario se trata de una relación pero que sea simultáneamente de acuerdo a (4) un elemento del producto cartesiano; expresado en terminología de Bourbaki [12]: $\prod_{i \in I} A_i = \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i\} \mid \forall i \in I, f(i) \in A_i$; es decir cada elemento del producto es una función y no una relación.

Contradiendo lo anterior sea $W \in \prod_{i \in I} A_i$ un objeto elegible en $(A_i)_{i \in I}$ tal que no es función; si no más bien una relación, lo cual implica al menos un índice con dos imágenes

distintas, se deduce que: $\exists i_0 \in I, \exists x \neq y \rightarrow [(i_0, x) \in W \wedge (i_0, y) \in W]$; sustituyendo f_c por W en (4): $W \in \prod_{i \in I} A_i$ implicará que se puede sustituir en (2): $W: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I; W(i) \in A_i$, que implica la existencia de un único elemento x para cada $i \in I \rightarrow \exists x \mid (i, x) \in W$.

$\therefore \forall i \in I \rightarrow \exists! x \mid (i, x) \in W$; $i_0 \in I \rightarrow \exists! x \mid (i_0, x) \in W$.

Dada la hipótesis de que no podía ser función f_c se tienen dos resultados distintos; lo que contradice la unicidad ■

Escolio.

Por lo anterior demostrado en dos formas distintas se concluye que cualquier *función de elección* f_c y por consecuencia el axioma de elección que hace uso de ella cumple las características modernas de función.

Definición 7

Con base en la definición 5 y 6 se puede generalizar que todo conjunto con índice I de una familia A de conjuntos indexadas por la misma I ; se puede formar una función $A: I$ que asigna cada índice un conjunto □.

Definición 8

Utilizando las definiciones 5,6 y 7, (1) y (3) el *Axioma de elección AC* de Fraenkel [5] estructuralmente puede ser expresada como:

$$\forall I \in \text{conjunto} \forall (A_i)_{i \in I}: I \rightarrow [(\forall i \in I), (A_i \neq \emptyset)] \Rightarrow [\exists f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I; f(i) \in A_i] \quad (5)$$

La ecuación (5) basada en Fraenkel [5] puede ser modernizada como un producto cartesiano que indique una función de elección (2) sobre una familia:

$$\forall I \in \forall (A_i)_{i \in I} \rightarrow [[(\forall i \in I), (A_i \neq \emptyset)] \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset] \mid \prod_{i \in I} A_i := \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i\}, f(i) \in A_i, \forall i \in I \quad (6)$$

□.

Cabe mencionar que Fraenkel no utiliza en su trabajo [5] el AC con cuantificadores sobre familias en (3) o $(A_i)_{i \in I}$ (5); mucho menos con notación de producto como en (4) o $\prod_{i \in I} A_i$ (6), el cual está basado en Bourbaki [12]. Fraenkel [6] acepta el axioma VI de Zermelo [5] [11] respecto a la familia de conjuntos no vacíos disjuntos donde un conjunto contiene exactamente un elemento de cada uno y genera las definiciones 1- 4. De igual forma Fraenkel [5] no hace una demostración de la *función de elección* en términos de función modernos.

Con lo anterior se ha modernizado en dos versiones el ZFC o AC.

La ecuación 3 también indica que una *función de elección* $f(Cn)$ de acuerdo a Fraenkel [5] en el dominio A independiente del “*buen orden*” sobre los elementos de cada *celda*. Entonces:

$$\exists f(Cn) = a_n \vee b_n \mid n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

La función de elección $f(Cn)$ es una instancia misma del AC que permite la existencia del mismo axioma de elección al ser $\{Cn\}$ una familia numerable de conjuntos nos vacíos indicado en la definición 5, por lo que con base a la definición 2 y ecuación 1 una familia infinita numerable *-pares de calcetines de Russell-* [5] es:

$$\exists A = \{ \{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots \} \quad (8)$$

De acuerdo a Fraenkel [5] serían indistinguibles entre sí, al no establecer un criterio externo a menos que se asuma la existencia del AC que cumpla con (2) y (3).

Axioma 1

Utilizando la definición 3, el sistema generado puede ser descrito ahora un universo generado modernizando el trabajo de Fraenkel [5].

Sea U el menor conjunto cerrado que cumple los axiomas de Zermelo del “*buen orden*” [11] II-V ($(\{\emptyset\}, \text{separación, pares, unión})$, así como la definición del conjunto potencia que contiene a: $\emptyset \in U, Z_0 \in U$ (como un centro que contiene a $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$) y una familia de celdas A_i como la descrita en la definición 5 y en (1) donde $A = \{Cn: n \in \mathbb{N}\} \in U$.

El sistema del AC bajo la descripción de Fraenkel [5] tiene *simetrías* en las *celdas* que es implícitamente un moderno “*automorfismo de estructuras sobre un objeto algebraico*” de acuerdo al trabajo de Galois de 1832 [15] donde describe que la *simetría* es una permutación del conjunto raíces respetando la estructura algebraica generando grupos de automorfismos sobre un conjunto base y que posteriormente formalizó Klein en 1872 [16] en donde utiliza el concepto anterior de automorfismo del universo U , además de las permutaciones de objetos (como lo elegibles) que preservan una estructura del universo generado U y que da clasificación a una geometría con base a sus *transformaciones* [16] (permutaciones) sobre objetos definibles llamados invariantes sobre los grupos de *transformaciones*□.

Definición 9

Modernizando la definición 4 (*simetrías*) de Fraenkel [5] $\forall n \in \mathbb{N}$ será una permutación elemental en U de los *urelementos*: $\sigma_n(a_n) = b_n, \sigma_n(b_n) = a_n \mid \forall x \rightarrow \sigma_n(x) = x$ extendiéndose de forma inductiva a cada conjunto del universo U de forma: $\sigma_n(x) = \{\sigma_n(x): x \in X\}$ □.

Definición 10

Sea G el grupo generado por todo σ_n que actúa en U : $G = \langle \sigma_n \rangle \mid n \in \mathbb{N}; g \cdot X = g(X)$ □.

Definición 11

Un conjunto $X \in U$ tiene invariancia bajo *simetrías* sobre una permutación sobre los *urelementos* de la definición 9 σ_n si $\sigma_n(X) = X$ e invariante sobre la definición 10 de G si $g(X) = X \mid \forall g \rightarrow g \in G$ □.

Definición 12

Sea F un conjunto finito. Un conjunto $X \in U$ tiene baja invariancia en *simetrías* si $\exists F \subset \mathbb{N} \mid \sigma_n(X) = X \mid \forall n \notin F$; por lo que un reducido número de *celdas* podrían ser invariantes, para el resto X no encuentra diferencia $a_n \vee b_n$ □.

Axioma 2

Fraenkel [5] indica que el trabajo de Zermelo [11] tiene “*propiedad definida*” cuando describe que un conjunto definido es construible mediante un número finito de parámetros y *aplicaciones* (funciones) finitas de los axiomas.

De acuerdo a las definiciones anteriores que se han venido describiendo, se puede modernizar lo anterior mediante una estructura para la simetría de conjuntos definibles en donde

todo conjunto definible sobre U (axioma 1) para un número finito de parámetros bajo las definiciones 10 y 12 tendrá una baja invariancia con los elementos de la definición 9 bajo G de la definición 10; por lo que $X \in U \rightarrow \exists F \subset \mathbb{N} \text{ finito} \mid \forall n \notin F, \sigma_n(X) = X$.

Un comentario interesante respecto al trabajo de Fraenkel [5] es que si bien, logra generar un modelo matemático basado en los conceptos que hemos modernizado en esta sección de: *urelementos, celdas, sistema generado y simetrías*, en donde no existe una función de elección para una familia numerable de pares indistinguibles, se ha logrado actualizar mediante las definiciones y axiomas propuestos. Así mismo, coincidiendo con Fraenkel [5] el AC modernizado logra ser independiente del resto de axiomas de Zermelo [11] desde el concepto de propiedad definida□.

III. CIFDQS (COUNTABLE INFINITE FAMILY OF DISCRETE QUANTUM STATES)

Definición 13

Utilizando la estructura moderna de Halmos [17] de acuerdo a Neumann en su trabajo *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* de 1932 [18] un espacio vectorial complejo de Hilbert \mathcal{H} existe si cuenta con una *aplicación* (función) denominada *producto interno Hermitiano* [17] descrito por $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ de Charles Hermite “*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*” [19] de 1856 en donde describe sus propiedades como el conjugado complejo en pares ordenados, simetría conjugada, positividad sobre \mathbb{C} y la noción implícita de sesquilinealidad, mismas con las que cuenta \mathcal{H} .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad (9)$$

(9) satisface la sesquilinealidad [17] lineal.

Para la primera entrada:

$$\forall \psi, \phi, X \in \mathcal{H}, (\forall \alpha, \beta) \in \mathbb{C} \mid \langle \alpha\psi + \beta\phi, X \rangle = \alpha\langle \psi, X \rangle + \beta\langle \phi, X \rangle \quad (10)$$

Y para la segunda entrada su conjugado-lineal [17]:

$$\langle \psi, \alpha\phi + \beta X \rangle = \bar{\alpha}\langle \psi, \phi \rangle + \bar{\beta}\langle \psi, X \rangle \quad (11)$$

(9) satisface la Hermiticidad [17] mediante:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \psi \rangle} \quad (12)$$

(9) Cumple con la positividad [17] debido a que:

$$\langle \psi, \psi \rangle \geq 0; \langle \psi, \psi \rangle = 0 \leftrightarrow \psi = 0 \quad (13)$$

Así mismo (9) tiene completitud al ser:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} \quad (14)$$

Las ecuaciones (10)-(14) describen que \mathcal{H} (9) de acuerdo a Halmos como un espacio vectorial normado completo con producto interno Hermítico y completo con respecto a su norma inducida [17] o lo que es conocido como la convergencia de sucesiones de Cauchy en \mathcal{H} [17] □.

Por otro lado Neumann indica que el estado físico de un sistema cuántico se representa por un vector denominado “*rayo*” en un espacio de Hilbert complejo [18]; por lo que para

el desarrollo cuántico del trabajo solo se usará el espacio de Hilbert en \mathbb{C} y no solamente \mathbb{R} [20].

Definición 14

Un estado cuántico puro es un vector ψ donde:

$$\psi \in \mathcal{H} \mid \|\psi\| = 1 \quad (15)$$

En mecánica cuántica dos vectores $(\psi, \phi \in \mathcal{H})$ que difieren por un factor complejo de módulo 1 representan el mismo estado físico si [20]:

$$\phi = e^{i\theta}\psi \mid \theta \in \mathbb{R} \quad (16)$$

De acuerdo a Neumann [18] el estado físico real se denomina rayo cuántico ψ de acuerdo a Moretti [20]:

$$[\psi] = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \phi = e^{i\theta}\psi, \exists \theta \in \mathbb{R}\} \quad (17)$$

□

Definición 15

Una familia contable (enumerable) al similar a la que se propuso en la sección anterior en la definición 5 para $(A_i)_{i \in I}$ admite cualquier elemento como posibles estados cuánticos discretos [18] y de acuerdo a la definición 10 y 11 se puede describir una sucesión normalizada de vectores en un espacio \mathcal{H} similar a las familias indexadas en la definición 7 donde $I = \mathbb{N}$ mediante la siguiente ecuación:

$$(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H} \mid \|\psi\| = 1 \quad (18)$$

□

Definición 16

Debido a que el trabajo tiende a la discretización se requiere que (16) brinde datos medibles; es decir que la familia (18) sea ortonormal [21] si cumple con:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (19)$$

Las estructuras de familias ortonormales [21] como (19) permiten obtener un par de resultados medibles con aplicaciones [22] en medidas concretas como el colapso formal como (18) en donde cada $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un estado puro, $[\psi]$ un rayo y el conjunto $\{[(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}]\}$ será un sistema de estados posibles de un sistema desde una estructura discreta; esto es una familia numerable $(A_i)_{i \in I}$ de la definición 5, por lo que una familia ortonormal que cumpla con (19) será la estructura a trabajar para desarrollo del modelo matemático □.

Definición 17

De acuerdo a la definición 13 y Conway [23] una *base ortonormal* o *Ortho-Normal Basis (ONB)* sobre un espacio \mathcal{H} (9) que cumpla con (19) es un conjunto con índice contable (enumerable) $I = \mathbb{N}$ [24] en un *subespacio vectorial* o *cápsula lineal* denominado *Span* [25] $\{e_n\} \mid n \in I \subseteq \mathcal{H}$.

$$\{e_n\} \leftrightarrow \begin{cases} \text{ortonormalidad: } \langle e_n, e_m \rangle = \delta_n \\ \text{completitud: } \text{Span}\{e_n \mid n \in I\} = \mathcal{H} \end{cases} \quad (20)$$

En espacios de Hilbert una *ONB* es también conocida como un *sistema ortonormal completo* o *CONS (Complete Orthonormal System)* [17].

□

Definición 18

Un *operador cuántico* $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es una función lineal que opera en \mathcal{H} y transforma el estado; cabe mencionar que esto puede no necesariamente ser físico o medible y es descrito bajo la condición de $T(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha T\psi + \beta T\phi$ [26].

Un *operador cuántico asociado (a un observable)* A es un *operador cuántico autoadjunto* que representa una observación física de magnitud como la posición cuántica, momento o spin de forma que $\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle$ [26].

Un *operador cuántico autoadjunto asociado (a un observable)* A^\dagger permite que los valores en la medición física denominados *espectro* sean valores en \mathbb{R} mediante la igualación del *operador cuántico asociado a un observable* A al *operador cuántico autoadjunto*; $A = A^\dagger$ [26]. A^\dagger es de tipo discreto cuando es numerable (contable), no tiene parte continua y cada λ_1 cuenta con un valor y un espacio individual de la forma: $A^\dagger \psi_n = \lambda_n \psi_n$. Físicamente en los aparatos de medición los A^\dagger con *espectro* discreto permiten obtener magnitudes \mathbb{R} seleccionando solo los *ortonormales*; como sucede con el número de partículas, el spin S_z o los estados cuánticos discretos de un átomo [26] □.

Un *operador cuántico compacto* K transforma conjuntos que operan en \mathcal{H} a conjuntos compactos \mathbb{R} que contienen un *espectro* de medición de estados $\{\psi_{n1}, \psi_{n2}, \psi_{n3}, \dots\}$ discreto; lo cual para el modelo permite que el *espectro* sea matemáticamente contable (numerable); sin embargo esto no representa una observación física, ni implica que siempre sea autoadjunto [26], por lo que para la literatura en física cuántica no es utilizado.

Definición 19

Dado un *operador cuántico* que *mapea* (función) a un espacio de Hilbert complejo $A: \mathcal{H}$; se define A^\dagger como el *autoadjunto* $A = A^\dagger$ que *mapea* a \mathcal{H} [26] de la forma:

$$A^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (21)$$

□

Definición 20

De acuerdo a la definición 17, el *espectro* discreto contable del modelo será: $\sigma(A^\dagger) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ que es el conjunto de resultados de la medición del *autoadjunto* A^\dagger *ONB* donde:

$$A^\dagger \psi_n = \lambda_n \psi_n \leftrightarrow [\psi_n \rightarrow \text{ortonormal}] \quad (22)$$

Así mismo existe una independencia física entre los estados cuánticos que aplica para $\forall n \neq \forall m$ □.

Definición 21

Utilizando (21); sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo, \mathbb{N} un conjunto contable $\mathbb{N} = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ con indexación [24] para estados de elección cuánticos posibles ψ_n de una familia Ψ denotada por la función de elección (4) (7):

$$\Psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H} \quad (23)$$

□

Definición 22

Con base en las definiciones 15-21 surge el concepto de “familias infinitas contables de estados cuánticos discretos” o *CIFDQS (Countable Infinite Family of Discrete Quantum*

States) como una familia que tiene una norma del espacio \mathcal{H} $\|\Psi(n)\| = 1$ que contiene vectores $\Psi(n)$ (rayos cuánticos) que representan los *estados discretos cuánticos* posibles elegibles por el *axioma de elección* (6) y la función Ψ de vectores n con imagen ψ_n que representan una medición mediante un *operador cuántico autoadjunto asociado a un observable* $A = A^\dagger$ discreto en donde la familia es un conjunto de elementos contables de acuerdo a (21) que cumple con:

$$[A = A^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \Psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H}] | \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \text{Normalizada: } \|\Psi(n)\| = 1 \\ \text{Discreta: } \forall A^\dagger \Psi(n) | \psi_n \rightarrow ONB \\ \text{Indexada: } (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} | \psi_n := \Psi(n). \text{Def 7} \\ \text{Independencia: } \forall n \neq m \rightarrow [\psi_n] \neq [\psi_m] \\ (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H} \\ A = A^\dagger \rightarrow A^\dagger \psi_n = \lambda_n \psi_n \neq 0 \end{cases} \quad (24)$$

La ecuación (23) es un *CIFDOS* normalizada y discretizada utilizando rayos [18] que une (al ser aplicable) el axioma-función de elección de [5] con la física cuántica en espacios de Hilbert [8] al poder realizar mediciones discretas de observaciones reales [26] para los contables infinitos estados cuánticos posibles en donde $A = A^\dagger \rightarrow A^\dagger \psi_n = \lambda_n \psi_n \neq 0 \square$.

IV. COLAPSO FORMAL COMO SELECCIÓN SLE-GRW

Continuando con la definición 13 sección anterior se dice que un sistema físico trabaja como un vector [18] $\psi_n \in \mathcal{H}$ que contiene los estados infinitos contables y las magnitudes observables discretas posibles con sus respectivos *espectros* $A^\dagger \psi_n = \lambda_n \psi_n \subseteq \mathcal{H}$.

De acuerdo a la física cuántica un sistema no observado puede encontrarse en *superposición* de Heisenberg [27] de infinitos estados cuánticos posibles y en el momento de observación para medirlo se genera un fenómeno denominado “*colapso de estado de la función de onda*” de Schrödinger [28]; es decir el cambio instantáneo (reducción) hacia uno solo de los estados denominado *eigenestado* ψ_k [18] descrito como la transición [18]:

$$\psi \rightarrow \psi_k \quad (25)$$

Algunas teorías indican que el *colapso* [27][18] sucede por las amplitudes de la *superposición* [27] inicial; lo cual apunta a un carácter no dinámico del proceso que ha generado distintas interpretaciones y teorías para formalizar su comportamiento.

Una de los modelos de colapso físico medible u objetivo [18] más aceptados es la “*teoría dinámica unificada para sistemas microscópicos y macroscópicos*” o *Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems* (GRW) de G. C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber de 1986 [29] que propone al *colapso* no como una abstracción matemática; sino como un fenómeno físico real medible estructurado por saltos espontáneos del estado cuántico [30]. Así mismo, trabajos recientes como el modelo de Leckey y Flitney de 2025 proponen la medición discreta del colapso espontáneo de una función de onda [31].

Definición 23

El principio de superposición [27] como se mencionó describe la simultaneidad sistémica de múltiples configuraciones posibles expresada mediante la estructura

lineal del conjunto de estados $\{\psi_n\}$ sobre un espacio \mathcal{H} como la ecuación (21) se pueden utilizar coeficientes complejos.

Se define *superposición* como la sumatoria del conjunto de estados cuánticos válidos de un vector *rayo* [18] para cada coeficiente c_n que representa la densidad de probabilidad o amplitud de acuerdo a Born (1926) [32] [33] en donde el cuadrado del módulo indica la probabilidad de que al observar el sistema se encuentre en un estado donde el operador cuántico A^\dagger tenga el *eigenestado* ψ_k [18] descrito en (25) siendo todos los estados físicos con magnitud [33] de la forma:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n | \langle \psi_n, \psi \rangle; \sum_n |c_n|^2 = 1 | \forall c_n \in \mathbb{C} \quad (26)$$

La ecuación (26) es coherente con el *espectro* discreto de la definición 22 de una familia *CIFDOS* en donde la familia contable $\{\psi_n\} \in \mathbb{N}$ es una combinación lineal de *eigenestados* [18] normalizados que son ortogonales entre ellos mismos \square .

Definición 24

Utilizando la definición 18 y 19 un *operador cuántico autoadjunto* $A = A^\dagger$ [26] con *espectro* discreto e *eigenestados* [18] normalizados como en (26), con la estructura ortonormal de (22), que satisface a (22) y (19), el conjunto de estados cuánticos infinitos contables $\{\psi_n\} \in \mathbb{N}$ puede ser modelado como la sumatoria que describe la combinación lineal infinita de *eigenestados* [18] en donde $\forall \psi \in \mathcal{H}$.

Se define como *probabilidad de colapso a un estado* ψ a la transición (25) que contiene simultáneamente la información de cada valor λ_n del operador A^\dagger mediante la probabilidad (26) de que al observar un sistema; este se encuentre en un estado [33] donde $\forall c_n$ indica la densidad con la que ψ proyecta sobre el estado ψ_n :

$$\mathbb{P}(\lambda_k) = |c_k|^2 \quad (27)$$

\square

Definición 25

Utilizando a la definición 15, 17 y la ecuación (18) existe una familia contable de *eigenestados* normalizada *ONB* (20) que satisface a (19) y *CIFDOS* (24).

Un *espectro discreto* es toda magnitud física medible sobre \mathcal{H} como la ecuación (21) con el operador A^\dagger donde $\forall \lambda_k \in \mathbb{R}$ es un *espectro* que se comporta como una superposición discreta que satisface a (26) de la forma:

$$\sigma(A) = \{\psi_n | n \in \mathbb{N}\} \quad (28)$$

\square

Definición 26

Mientras la teoría y ecuación de *función de onda* de Schrödinger [28] $i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t)$ [18] es unitaria, continua, determinista y reversible [18]; la teoría del *colapso estándar* es discreta, no unitaria, probabilística e irreversible unificando (23) y (26) como:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \rightarrow \psi_k | \langle \psi_n, \psi \rangle, \forall c_n \in \mathbb{C} \quad (29)$$

El postulado afirma que al medir A^\dagger con *espectro* discreto; se reduce (colapsa) a uno de los posibles *eigenestados* [18] cuya probabilidad está dada por (27) \square .

El estado del sistema se encuentra en función de la interacción de medir mediante un dispositivo macroscópico;

por lo que lleva a al problema de *frontera cuántico-clásica* en donde el colapso no es autónomo si no dependiente de la intervención, por lo que el *axioma de elección* [11] complementa el modelo.

El *colapso estándar* indica que el sistema pierde información durante el proceso al igual que sucede con en el modelo de Schrödinger [28] pero con irreversibilidad; sin embargo (27) el modelo de Born [33] no cuenta con un sistema de selección estocástica o que describa la transición de estado por lo que han aparecido teorías que lo explican como el colapso objetivo [30], historias consistentes [34], decoherencia ambiental [35], estado relativo [36], colapso gravitacional [37] y otras teorías subyacentes [38] para tratar de explicar el colapso de los conjuntos de ondas [39].

Definición 27

Como se ha descrito en mecánica cuántica el *colapso estándar formal* [18] depende del acto de medir. Por otro lado el modelo GRW [29] propone una estructura matemática que describe una función de onda que presenta eventos de localización espontáneos o *spontaneous localization events* (SLE) [29] los cuales suceden aleatoriamente durante el tiempo, afectando su localización y cuya característica principal es su independencia de parámetros universales del observador y parámetro de localización L_x que se encuentra en una posición aleatoria x ; lo anterior coloca al modelo como dinámico, continuo y unitario.

El comportamiento SLE [29] del sistema respecto al tiempo establece que se comporte de acuerdo a la ecuación de Schrödinger mediante una dinámica no continua, estocástica y con colapsos espontáneos de acuerdo a la ecuación:

$$\psi \rightarrow \frac{L_x \psi}{\|L_x \psi\|} \quad (30)$$

El modelo propone que la frecuencia de salto lleva a un proceso de conmutación como sucede en los sistemas de comunicación, pero relativo al tamaño; comportándose en baja frecuencia en niveles microscópicos individuales y alta frecuencia en los niveles macroscópicos. Lo anterior permite que no se genere el problema de *frontera cuántico clásico* del *colapso estándar* □.

Debido a que el modelo GRW [29] trabaja mediante *colapsos espontáneos*; su selección estocástica de estados puede ser interpretada como una CIFDQS al tratarse de un conjunto discreto de un *colapso real* (estados físicamente posibles) mediante un modelo probabilístico (27) en donde a cada evento de *colapso SLE* le corresponde un índice de la forma $k \in \mathbb{N}$

Definición 28

De acuerdo a la definición 27 con el modelo de transición de la ecuación (29) y debido a la aleatoriedad de un SLE [29], el modelo GRW [29] puede describirse como la siguiente distribución de probabilidad con $k \in \mathbb{N}$:

$$\psi \rightarrow \psi_k \mid k \sim \mathbb{P}_{GRW} \quad (31)$$

□.

Teorema 8

La ecuación (31) puede ser reescrita de acuerdo a un índice k elegido de acuerdo a una distribución de probabilidad que depende del mecanismo de SLE [29] propio del modelo estocástico mediante la *función de colapso SLE* F_{GRW} :

$$F_{GRW}: \rightarrow \Psi \rightarrow \Psi \mid \Psi = \{\psi_k\}, n \in \mathbb{N}, \Psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H} \quad (32)$$

La ecuación (32) es una función no unitaria y discontinua que cumple con dominio dada una familia de estados discretos asociados a un operador A^\dagger o descomposición relevante, con codominio de la familia de estados discretos bajo la regla de elección de elementos de la familia GRW [29] de la distribución □.

Demostración

Dado un espacio discreto descrito por las ecuaciones similares a (21) descrito por $A = A^\dagger: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, (28) $\sigma(A) = \{\lambda_n\} \mid n \in \mathbb{N}$, una familia contable de eigenestados Ψ similar a (18) donde $\Psi = \{\psi_n\} \mid n \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{H}$; $A \psi_n = \lambda_n \psi_n \mid \|\psi_n\| = 1$.

Sea S un conjunto de estados normalizados que admiten una descomposición discreta en la base Ψ y el *colapso SLE* GRW [29] una función que depende de la elección aleatoria bajo una k (31) sustituyendo S en (32) en donde existe:

$$F_{GRW}: \rightarrow S \rightarrow \Psi \mid F_{GRW}(\psi) = \psi_k \mid n \in \mathbb{N}, \Psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H}, k \sim \mathbb{P}_{GRW}, k \in \mathbb{N} \quad (33)$$

La función F_{GRW} (33) es una función bien definida de acuerdo a (33) en donde $\forall \psi \in S$ le corresponde de acuerdo a GRW [29] que utilizará un marcador de posición “.” para cualquier evento aleatorio condicionado al estado $\mathbb{P}_{GRW}(\cdot \mid \psi) \in \mathbb{N}$ en donde el *colapso SLE* [29] utiliza como elección el índice $k \in \mathbb{N}$ estableciendo como en (32) que $F_{GRW}(\psi) := \psi_k$; por lo que de acuerdo a (33) la función (32) cuenta con *existencia y unicidad*; es decir: $\forall \psi \rightarrow \exists k \in S \mid F_{GRW}(\psi) = \psi_k$ y de acuerdo a la definición 23 a cada colapso real SLE [29] le corresponde por unicidad solamente un k .

Debido a que cuenta con las condiciones anteriormente expresadas de existencia y unicidad del dominio S con su única imagen en Ψ ■.

Así mismo (32) es no unitaria debido a que la condición de una función unitaria debería ser $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ y (28) no cumple ya que debe ser lineal y preservar el producto interno; es decir: $\langle U\phi, U\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \mid \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$.

Simplificando el problema se asume un conjunto binario de estados $\exists \{\psi, \phi\} \in S \mid \psi \neq \phi, \psi = \sum_n c_n \psi_n, \phi = \sum_n c_n \psi_n$; en donde cuando transita a un colapso SLE [29] en donde coinciden con el mismo índice $k \in \mathbb{N}$ de (33) a ambos: $F_{GRW}(\psi) = \psi_{k_1}, F_{GRW}(\phi) = \psi_{k_2} \mid k_1 = k_2 \rightarrow \langle F_{GRW}(\psi) \mid F_{GRW}(\phi) \rangle = \langle \psi_{k_1}, \psi_{k_2} \rangle = 1$.

Pero como se describe el conjugado complejo [8] [17] en: $\langle \psi, \phi \rangle = \sum_n \bar{c}_n d_n \neq 1 \rightarrow \psi \neq \phi; \therefore \langle F_{GRW}(\psi), F_{GRW}(\phi) \rangle \neq \langle \psi, \phi \rangle$.

Lo anterior contradice el producto interno demostrando que la función F_{GRW} es no unitaria ni lineal ■.

Por otro lado F_{GRW} es no continua respecto a la norma de \mathcal{H} . Nuevamente simplificando el problema se asume un conjunto binario que representa dos estados ortonormales $\{\psi_1, \psi_2\} \in \Psi$ y la siguiente sucesión de estados restringida: $\psi^{(n)} = \alpha_n \psi_1 + \beta_n \psi_2 \mid n \in \mathbb{N}, \{\alpha_n, \beta_n\} \in \mathbb{C}$ normalizados.

Dado que $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1 \wedge \psi^{(n)} \rightarrow \psi^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$ está en norma.

Si la función (33) se comporta de acuerdo a *SLE GRW* [29], entonces tendrá una distribución \mathbb{P}_{GRW} pudiendo elegir binariamente el valor n que domina a ψ_n :

$$n \begin{cases} 2n \rightarrow k = 1 \rightarrow \psi_1 \\ 2n + 1 \rightarrow k = 2 \rightarrow \psi_2 \end{cases} \rightarrow F_{GRW}(\psi^{(n)}) = \begin{cases} \psi_1 \rightarrow 2n \\ \psi_2 \rightarrow 2n + 1 \end{cases}$$

La sucesión $\{\psi^{(n)}\}$ converge en \mathcal{H} ; mientras que la sucesión de imágenes $\{F_{GRW}(\psi^{(n)})\}$ no lo hace en norma al oscilar en el intervalo $\|\psi_1 - \psi_2\| = \sqrt{2} \neq 0$.

Por lo tanto la función no es continua; al existir una sucesión que converge, además de un límite que es distinto al establecido por la función y la función F_{GRW} es discontinua en la norma de \mathcal{H} ■

Por último dado el dominio $Dom(F_{GRW}) = S$ y un conjunto de estados admisibles a ser discretizados de la familia de la ecuación (21) de modo: $\Psi: A = A^\dagger$; su codominio será entonces el conjunto: $Cod(F_{GRW}) = \Psi = \{\psi_k: k \in \mathbb{N}\}$; es decir la familia discretizada de estados *eigenestados* generada por el *espectro* discreto de A o la descomposición modular de la función ■.

Como consecuencia la regla de correspondencia de la función será la ecuación (31) que define la regla de elección estocástica de la familia discreta Ψ ■.

Escolio

F_{GRW} (33) es una función no unitaria y discontinua de colapso de acuerdo a *SLE GRW* [29] que toma como entrada un estado discretizado ψ_n del conjunto de superposiciones de una familia Ψ que de acuerdo a la distribución *SLE GRW* [29] a modo axioma de elección [11] [5] elige un elemento de la familia Ψ que produce el colapso cuántico a un estado ψ_k ■.

Definición 29

Sea \mathcal{F} la colección [18] de todas las familias discretas contables (18) de estados posibles bajo un operador A^\dagger , una función $\Psi(\mathcal{F})$ que describe a $\{\psi_n\}$ y al colapso $C_{GRW}\{\psi\} = \psi_k$; la función que describe el colapso *SLE GRW* [29] de las familias discretas numerables de estados normalizados al que transitan puede ser modelado como:

$$C_{GRW} = \mathcal{F} \rightarrow \Psi(\mathcal{F}) \quad (34)$$

□.

V. MODELO MATEMÁTICO DEL COLAPSO FORMAL SLE-GRW COMO UNA FUNCIÓN MEDIANTE EL AXIOMA DE ELECCIÓN PARA CIFDQS.

En las secciones anteriores se han descrito los módulos que conforman al modelo matemático.

El modelo parte de que la proposición 1 que moderniza la función de elección de Zermelo-Fraenkel ha sido demostrado como una función y del teorema 8 en donde existe una función de elección para un estado de colapso formal *SLE GRW* [29] es una función demostrada.

A continuación se desarrolla formalmente el modelo matemático de una función de elección que utiliza el *AE* de Zermelo-Fraenkel para explicar al colapso formal *GRW* [29] en *CIFDQS*.

Teorema 9

Función de elección para el colapso formal *GRW* en *CIFDQS* mediante el *AE* Zermelo-Fraenkel.

Dado un espacio de Hilbert complejo $A: \mathcal{H}$ estructurado con un operador *autoadjunto* cuántico que actúa como función como en la definición 19:

$$A = A^\dagger: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (35)$$

Donde su proceso de observación de acuerdo a (35) genera un operador *autoadjunto* Ψ que actúa como familia contable posibles estados cuánticos que devuelve un *espectro discreto* como un conjunto con índice k como en la definición 15:

$$\Psi = \{\psi_k\} \subseteq \mathcal{H} \mid k \in \mathbb{N} \quad (36)$$

Sea una *CIFDQS* mediante la definición 24 de *eigenestados* normalizados asociados al operador *autoadjunto* A^\dagger (35) con $\|\psi_k\| = 1$ que de acuerdo al teorema 8 cuenta con un conjunto de estados normalizados que admiten una descomposición discreta en la base Ψ y un salto dado por la función de colapso *SLE GRW* [29].

Sea \mathbb{S} el conjunto que denota todos los estados en superposición (26) discreta de la familia Ψ (36) de tipo *CIFDQS*:

$$\mathbb{S} = \{\psi \in \mathcal{H}: \psi\} = \{\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \psi_k, \sum_k |c_k|^2 = 1\} \quad (37)$$

De acuerdo a las definiciones 27-29 que describen el modelo de evento de localización espontánea de *GRW* [29] asociado a un posible estado $\psi_k \in \mathbb{S}$; la distribución de probabilidad discreta (27) que describe un salto está dada por:

$$p(\cdot \mid \psi) \mid \mathbb{N} \rightarrow [0,1] \quad (38)$$

Usando a (38) La probabilidad de colapsar *GRW* [29] en el estado ψ_k es asignada por cada índice k mediante:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p(k \mid \psi) = 1 \quad (39)$$

Sea $(\mathbb{X}_\psi)_{\psi \in \mathbb{S}}$ una familia indexada por \mathbb{S} de subconjuntos de $\Psi \neq \emptyset$ que indican los estados elegibles donde:

$$\forall \psi \in \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{X}_\psi = \{\psi_k\} \in \Psi \mid p(k \mid \psi) > 0 \mid \mathbb{X}_\psi \neq \emptyset \quad (40)$$

De acuerdo al Axioma de Elección de Zermelo-Fraenkel [3][4][5][11] y definición 6 existe una función de elección.

Sea la función de elección F_{GRW} definida como:

$$F_{GRW}: \mathbb{S} \rightarrow \bigcup_{\psi \in \mathbb{S}} \mathbb{X}_\psi \mid \forall \psi \in \mathbb{S}, F_{GRW}(\psi) \in \mathbb{X}_\psi \quad (41)$$

La función de elección F_{GRW} (41) permite obtener bajo el contexto del axioma de elección *AC* Zermelo-Fraenkel elegir un único estado $F_{GRW}(\psi)$ para cada rayo ψ [18] definido como un salto cuántico bajo el modelo *GRW* dentro de la familia *CIFDQS* $\Psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ denotado como una función global de la forma:

$$F_{GRW} \in \prod_{\psi \in \mathbb{S}} \mathbb{X}_\psi \mid F_{GRW}(\psi) \in \mathbb{X}_\psi \subseteq \Psi \quad (42)$$

■

Demostración 1

(42) es una función bien definida.

Dado el índice k (18) de los estados de superposición discreta \mathbb{S} (37); en la familia (35) existe un operador A_i que define a la familia \mathbb{X}_ψ similar a (40):

$$\mathbb{X}_\psi = \{\psi_k\} \in \Psi; p(k | \psi) > 0 \mid i = \psi \in \mathbb{S}, \mathbb{X}_\psi \neq \emptyset \quad (43)$$

Dado el axioma de elección de la definición 8; existe una función de elección (7) global como en (42).

Sea una subfamilia finita $\{\psi_k\} \subseteq \mathbb{S}$ y debido a que $\mathbb{X}_\psi \neq \emptyset \rightarrow f_1(\psi_1) \in \mathbb{X}_1$.

$\therefore f_1$ es una función de elección que aplica en $\{\psi_1\}$.

Y por consecuencia una subfamilia \mathbb{S} será:

$$\exists f_n = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \in \mathbb{X}_{\psi_j} \rightarrow \Psi \quad (44)$$

Por inducción de (44) la siguiente subfamilia \mathbb{S} será:

$$\exists f_{n+1} = \{\psi_1, \dots, \psi_{n+1}\} \in \mathbb{X}_{\psi_{n+1}} \neq \emptyset \rightarrow \Psi \quad (45)$$

Debido a que $\mathbb{X}_{\psi_{n+1}} \neq \emptyset$ se debe elegir un elemento: $\psi_{k_{n+1}} \in \mathbb{X}_{\psi_{n+1}}$. Sea:

$$f_{n+1}(\psi_j) = \begin{cases} f_n(\psi_j) \rightarrow j = 1, \dots, n, \\ \psi_{k_{n+1}} \rightarrow j = n + 1. \end{cases} \quad (45)$$

$$\therefore \forall \mathbb{S} \subseteq (\mathbb{X}_\psi)_{\psi \in \mathbb{S}} \rightarrow \exists f_n(\psi_j) \quad (46)$$

f_{n+1} es una función de elección similar a F_{GRW} (42) para la subfamilia tamaño $n + 1$.

Mediante el AC Zermelo-Fraenkel [5] [11] se deduce la existencia de una función global.

$$\exists F_{GRW} \in \prod_{\psi \in \mathbb{S}} \mathbb{X}_\psi \quad (47)$$

$$\therefore F_{GRW}: \mathbb{S} \rightarrow \Psi \mid F_{GRW}(\psi) \in \mathbb{X}_\psi \quad (48)$$

Que es la función de colapso formal GRW en una familia CFIDQS mediante el axioma de elección ■.

Demostración 2

(42) es una función.

Debido a que la *función de elección* (2) basada en Fraenkel [5] fue modernizada como un producto cartesiano en (4) y la proposición 1 demostró que (4) $f \in \prod_{i \in I} A_i$ es una *función de elección* y cumple las características de función moderna al contar con: dominio I , codominio $\bigcup_{i \in I} A_i$, imagen $f[I] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ y la regla de correspondencia no ambigua $i \mapsto f(i) \mid f(i) \in A_i$; así como las condiciones de unicidad funcional: $(i, x) \in f \wedge (i, y) \in f \rightarrow x = y$; en donde $f(i)$ es el único elemento de A_i emparejado con i ; así mismo en la demostración 2 de la proposición 1 se cumple que (4) no es una relación y el teorema 8 demostrado por (33) describe una función sustituida por S que depende de la elección aleatoria bajo un índice k (31) $F_{GRW}: S \rightarrow \Psi \mid F_{GRW}(\psi) = \psi_k \mid n \in \mathbb{N}, \Psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H}, k \sim \mathbb{P}_{GRW}, k \in \mathbb{N}$.

Al contar (42) con las mismas características y haber sido obtenida mediante inducción de la proposición 1 y el teorema 8 los cuales fueron demostrados bajo la regla de existencia para una función; entonces la función de elección (42) que

demuestra el colapso GRW [29] es una función y no una relación ■

VI. SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA DEL MODELO DEL COLAPSO FORMAL SLE-GRW COMO UNA FUNCIÓN MEDIANTE EL AXIOMA DE ELECCIÓN PARA CIFDQS EN QISKIT

QISKIT [40] es un *framework Open-source* desarrollado por *IBM* para cómputo cuántico que permite la simulación de sistemas cuánticos mediante el lenguaje *Python* mediante el IDE *Spyder* desde computadoras personales hasta cuánticas.

La librería *QuantumCircuit* permite para crear y manipular *circuitos cuánticos*, los cuales son los algoritmos que utilizan operaciones aritméticas y lógicas cuánticas sobre *qubits* (*bits cuánticos*) [41] el cual es “...la unidad básica de información utilizada para codificar datos en computación cuántica y puede entenderse mejor como el equivalente cuántico del bit tradicional utilizado por las computadoras clásicas para codificar información en binario” [42].

La librería *AerSimulator* permite emular una computadora cuántica de alto rendimiento dentro de *Qiskit* mediante *circuitos cuánticos*, sus estados como vectores o matrices de densidad; así como simular condiciones como el ruido cuántico para comprobar modelos en distintos estados.

La librería *Statevector* representa y analiza el estado cuántico completo de un sistema en un momento mediante la creación de instancias y vectores de estado de un *circuito cuántico* el cual es “...una secuencia de puertas cuánticas (*transformaciones unitarias*) aplicadas a *qubits*, donde todo el cálculo se representa como un grafo acíclico dirigido cuyos nodos son puertas y cuyos cables siguen la evolución de los estados cuánticos” [43] que devuelve una descripción matemática de las superposiciones de estados cuánticos de todas las posibles configuraciones permitiendo simular sistemas teóricos para obtener resultados medibles. A continuación se describe el pseudocódigo del método *choose*

Método *choose(k)*:

```
#Dada una familia indexada de estados discretos
#Ψ = { Ψ[k]: k ∈ I } ⊆ H, el Axioma de Elección
#garantiza la existencia de una función:
#f_AC : I → H; f_AC(k) = Ψ[k] donde cada Ψ[k] es
#un representante elegido del conjunto Ψ.
```

Entrada:

```
k : índice entero (k ∈ I)
self.family: familia Ψ = (ψ_0, ψ_1, ...)
```

Procedimiento:

1. k pertenece al dominio $f_AC(k) = \psi_k$?
- En caso contrario: error
2. Recuperar el estado: $\psi \leftarrow self.family[k]$
3. Devolver ψ como la elección de f_AC .

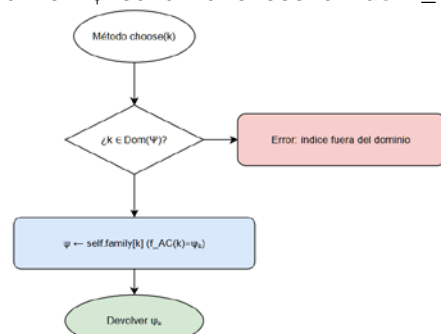


Fig. 1. Diagrama de flujo del método *choose(k)*.

El pseudocódigo de la clase función de elección del colapso formal *GRW* mediante el axioma de elección para *CIFDQS* se muestra a continuación:

```
#Clase Función de elección AC sobre una CIFDQS:
Clase ChoiceFunctionAC:
```

```
#Sea  $\Psi = \{ \Psi[k]: k \in I \}$  una familia indexada de
#estados discretos en un espacio de Hilbert  $H$ ,
#donde  $I \subseteq \mathbb{N}$  (familia contable).
k : índice entero
 $\Psi$  : familia CIFDQS =  $(\psi_k)_{k \in I}$ 
```

```
#Definición función de elección:
```

```
f_AC :  $I \rightarrow H$ 
f_AC(k) =  $\psi_k$ 
```

```
Entrada:
```

```
family = ( $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ )
#Familia CIFDQS contable,  $\Psi[k] \in H$ 
```

```
Método inicializar(family):
self.family  $\leftarrow$  family
```

```
Método choose(k):
#k  $\in I$  y existe  $\Psi[k]$  definido en family
```

```
Paso 1:  $\psi \leftarrow$  self.family[k]
si k no está en el dominio de  $\Psi$ : error
retornar  $\Psi[k]$ 
```

```
Paso 2: devolver  $\psi$ 
```

```
Salida:
```

```
 $\Psi[k]$ seleccionado
```

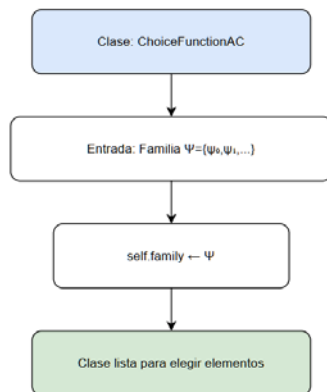


Fig. 2. Clase ChoiceFunctionAC.

Una vez definida la clase AC y el método *choose*, se presenta el pseudocódigo del modelo matemático para la simulación del colapso formal *GRW* mediante la función y axioma de elección para *CIFDQS* descrito en la sección anterior.

Simulación del Colapso formal GRW mediante la función y axioma de elección para *CIFDQS*

```
Entrada:
```

```
N_TRAJ = número de trayectorias (~1000)
T = número de pasos de evolución-cuando (~6)
```

```
Inicializar:
```

```
Definir familia CIFDQS =  $\{\psi_0, \psi_1, \psi_+, \psi_-\}$ 
Definir función de elección AC(family)
```

```
Definir estado inicial  $\psi = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ 
```

```
Procedimiento principal:
```

```
Para cada trayectoria i en [1 ... N_TRAJ]:
 $\psi \leftarrow$  estado inicial
genealogía  $\leftarrow$  lista vacía
registro_probabilidades  $\leftarrow$  lista vacía
```

```
Para cada tiempo t en [1 ... T]:
```

```
(1) Dinámica unitaria  $\theta_t \leftarrow (t+1) \cdot \pi/6$ 
 $\psi \leftarrow U(\theta_t) \psi$ ;  $U(\theta_t) = RY(\theta_t)$ ;  $U(\theta_s)$ 
(2) Probabilidades: distribución_Born  $p(k|\psi) = |\langle \psi_k, \psi \rangle|^2$  para cada estado  $\psi_k$  CIFDQS.
Normalizar  $p(k|\psi)$ 
(3) Elegir k según  $p(k|\psi)$  (evento GRW) (SLE)
Elegir k según distribución  $p(k|\psi)$ 
(4) Función de elección AC  $\psi \leftarrow AC.choose(k)$ 
(5) Registrar ( $\psi, p$ , amplitudes)
```

```
Registrar:
```

```
genealogía.append(k)
# índice del estado colapso  $\psi_k$ 
registro_probabilidades.append(  $p(k|\psi)$  )
# probabilidad Born asociada al colapso
Guardar genealogía y registro_probabilidades
Grafo_A: nodos secuenciales de 1 trayectoria.
Grafo B: muestreo de 200 nodos  $\rightarrow$  árbol GRW.
Grafo C: matriz de transición  $\rightarrow$  cadena de Markov.
```

```
Salida:
```

```
Genealogías GRW por trayectoria
# secuencias  $\{k_1, k_2, \dots, k_T\}$ 
Distribuciones Born registradas en cada SLE
#  $p(k|\psi)$  en todos los pasos
Figuras(Born, árbol GRW, heatmap, histograma)
```

El programa Una vez definida la clase AC y el método *choose*, se presenta Clase AC como regla de elección

Para lo cual hace uso de las librerías científicas de *numpy*, de graficado *matplotlib*, la creadora de grafos *networkx*, y los ya descritos *qiskit* con sus módulos *QuantumCircuit*, *AerSimulator* y *Statevector*.

La clase ChoiceFunctionAC genera una familia *CIFDQS*: $\{\psi_0, \psi_1, \dots\}$ mediante la función de elección *choose*(self, k) $f_{AC}(k) = \psi_k$; si el índice está fuera del dominio del AC regresa self.family[k].

El sistema utiliza dos funciones: una para convertir amplitudes y otra para vectores a forma polar mediante los módulos de *numpy* *np.abs(z)* y *np.angle(z)*.

Para las familias *CIFDQS* se genera la función *generate_CIFDQS*() que devuelve una matriz de valores complejos [*psi0*, *psi1*].

El sistema genera una distribución de Born [33] mediante *born_distribution(state, family)* devolviendo una matriz de probabilidad *probs* = [].

La función de colapso GRW *GRW_collapse(state, family, ac_choice)* agrupa los datos anteriores retornando los datos *collapsed, k, probs*.

Se genera una dinámica unitaria *Qiskit* gracias a la librería de simulación de circuitos *AerSimulator* mediante el método "*statevector*" devolviendo una matriz.

Para la simulación *GRW* de 1000 trayectorias y 6 *SLE* se generó la función *simulate_GRW(num_traj=1000, steps=6)* en donde se crean las familias *CIFDQS*() y se usa la función de elección *ac = ChoiceFunctionAC(family)* con sus respectivas matrices para trayectorias y grafos mediante *U(θ)* y las

amplitudes en forma polar para obtener los estados de colapso, trayectorias, familia y datos.

La trayectoria individual de cada grafo se obtiene mediante la función `def graph_single_trajectory(graph_data, traj_index=0)` en un análisis para ir agregando nodos con sus distintas ramificaciones estocásticas y muestreos como la función `graph_branching(graph_data, sample_size=200)`.

La función para obtener la cadena de transición de Markov [38] está dada por `graph_markov(graph_data)` gracias a la librería `networkx` mediante `G = nx.DiGraph()` agregando los nodos ψ_0 y ψ_1 .

El sistema produce finalmente los datos, grafos y gráficos de las figuras 4 a la 9.

El diagrama de flujo que explica lo anterior se describe en la figura 3.

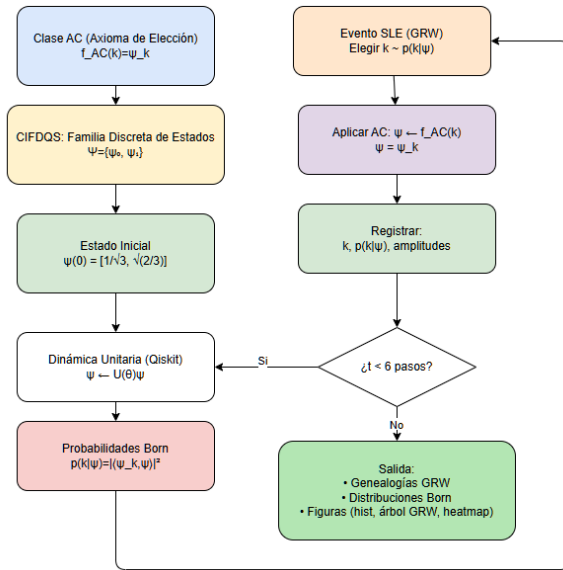


Fig. 3. Diagrama de flujo del sistema basado en el modelo matemático de colapso formal GRW como una función de elección mediante el axioma de elección para CIFDQS en QISKIT.

Para el desarrollo de los siguientes grafos genealógicos [43] se utilizará la simbología que se ha venido trabajando en el modelo ψ_k , su probabilidad y amplitud complejas del estado y un módulo y fase de la forma $re^{i\theta}$ [44].

La simulación utiliza 1000 trayectorias y 6 *colapsos SLE GRW*; lo anterior genera una profundidad en el árbol *Qiskit*. A continuación se muestran los resultados de la simulación.

Las siguientes estructuras producto de la simulación reflejan la *genealogía* [43] de estados dentro de la familia *CIFDQS* y el modelo *GRW* en donde cada colapso es seleccionado mediante la función de elección *fAC* de acuerdo al axioma de elección Zermelo-Fraenkel.

La Figura 4 muestra el *árbol genealógico* [43] de colapsos *GRW* de la simulación estocástica de 10 trayectorias independientes para una correcta visualización con 6 eventos *SLE*. El tiempo t discreto del proceso de colapso va de 0 a 5; cabe resaltar que cada incremento de t corresponde a una aplicación de la *dinámica unitaria* [18] seguida de un evento *GRW* por lo que no representa una magnitud real; por otro lado las ordenadas representan el índice de la *trayectoria* [18] en donde se observan las 10 *realizaciones simultáneas* [46] del proceso. Cada nodo ψ_k simboliza un *colapso* y las aristas muestran la *evolución causal* [6] dentro de cada trayectoria [18]. La estructura resultante de la simulación demuestra la *no unitariedad* [6] [30] del modelo matemático, su estocasticidad

del *colapso* [30], su *divergencia* entre distintas trayectorias producto de las fluctuaciones cuánticas [46] y la forma típica de *ramificación* estocástica de un salto cuántico [47].

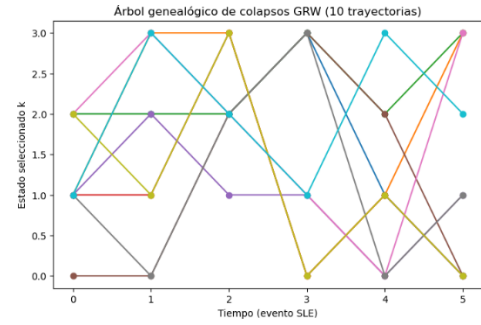


Fig. 4. Grafo A. Una sola realización estocástica con 6 colapsos ψ_t .

La Figura 5 muestra un gráfico de calor (*heatmap*) de transiciones *GRW* producto de la simulación en donde se obtiene una matriz de probabilidad de *SLE* donde el eje de las abscisas indica el tiempo discreto $t = [0 - 5]$ y en las ordenadas el estado de colapso $k \in \{0, 1, \dots\} \in \text{CIFDQS}$. La matriz *heatmap* indica un color de similar a la ecuación (31) de modo: $p_t(k) = p(k | \psi(t))$.

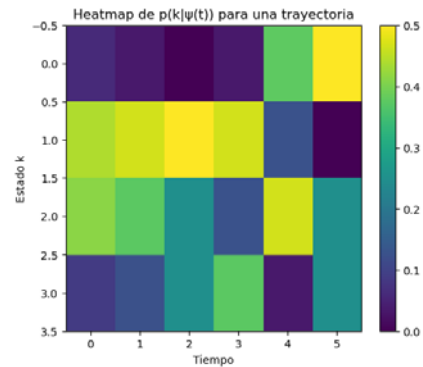


Fig. 5. Heatmap $p_t(k) = p(k | \psi(t))$.

La Figura 6 muestra la simulación respecto al *espectro Born* [32] previo al colapso *GRW* mediante las probabilidades de sus estados discretos $\psi_k \in \Psi \subseteq \text{CIFDQS}$ de acuerdo a (31) y (43) será $p(k | \psi) = |\psi_k|^2$. Las abscisas describen las probabilidades Born [33] para dos estados: $\{\psi_0, \psi_1\} = [0 \sim 0.4]$ previo al *colapso* y las ordenadas marcan los dos estados discretos [18] mediante líneas que representan muestras estadísticas de ellos; lo que permite observar en la simulación la asimetría probabilística [21] inducida de la dinámica del sistema simulado, su tendencia de cada estado a *colapsar* hacia un valor dominante [18], la correspondencia con la medida cuántica estándar (reglas de Born) [32] y que Ψ es una familia discreta y normalizada.

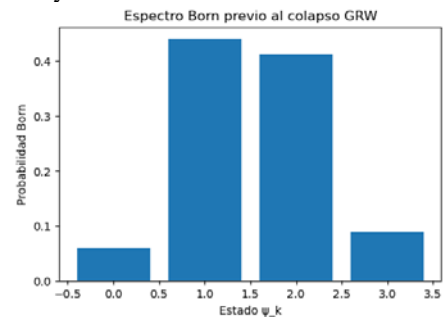


Fig. 6. Espectro Born previo al colapso.

La Figura 7 describe el histograma final de la simulación de 1000 trayectorias en donde se puede apreciar en las abscisas el estado de colapso $k \in \{0,1\}$ y en las ordenadas una $freq(k) = |\{\Rightarrow \psi_k\}|$ de $[0 - \sim 25]$ La Figura C presenta el histograma de estados finales para 1000 trayectorias GRW, cada una con 6 eventos de colapso SLE para cada trayectoria que termina en ψ_k .

Lo anterior junto a la simulación permiten describir nuevamente su tendencia de cada estado a *colapsar* hacia un valor dominante [18] y la consistencia con la medida cuántica estándar (regla de Born) [32] para cada estado mediante la función f_{AC} , la propagación de forma estocástica del SLE, una nueva normalización por el colapso SLE GRW distribución no trivial en el estado final y una emergencia macroscópica [18] de datos producidos por un proceso cuántico no unitario [18].

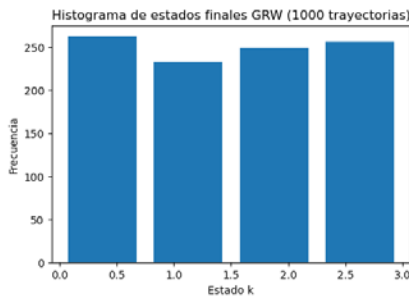


Fig. 7. Histograma final después del colapso.

El grafo de genealogía [43] A de la figura 8 describe una sola realización estocástica ψ_{t+1} del proceso de elección mediante la función f_{AC} GRW similar a la función (45) en donde se aprecian 6 *colapsos* SLE-GRW apreciados como saltos cuánticos:

$$(\psi_{t+1}) = f_{AC}(k_t) \mid k_t \sim p(k \mid \psi_t) \quad (49)$$

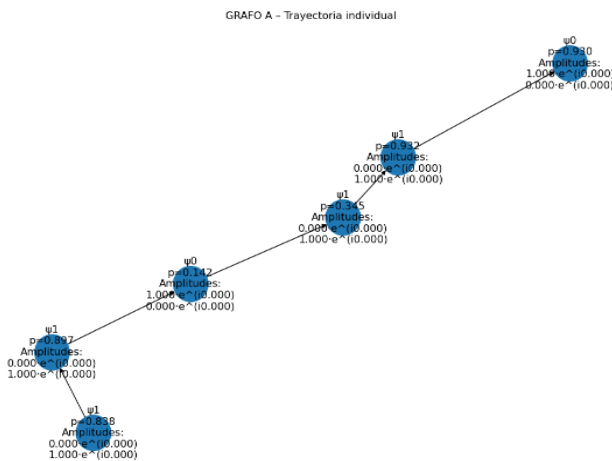


Fig. 8. Grafo A. Una sola realización estocástica con 6 colapsos ψ_t .

El grafo B de la figura 9 describe una submuestra del conjunto de 1000 trayectorias de 200 nodos muestreados en el grafo de genealogía [43] que forma el árbol GRW se describe como:

$$\mathcal{T}_{200} \subseteq \mathcal{T} = \{\psi_t^{(j)}, k_t^{(j)}, p_t^{(j)} \mid j = [1..1000], t = [1 \dots 6] \} \quad (50)$$

La ecuación (50) y la simulación describen un proceso de ramificación estocástico que demuestra el impacto de Born, la no-unitariedad del sistema y el uso de la función f_{AC} como mecanismo determinista interno mediante el axioma de elección de Zermelo-Fraenkel:

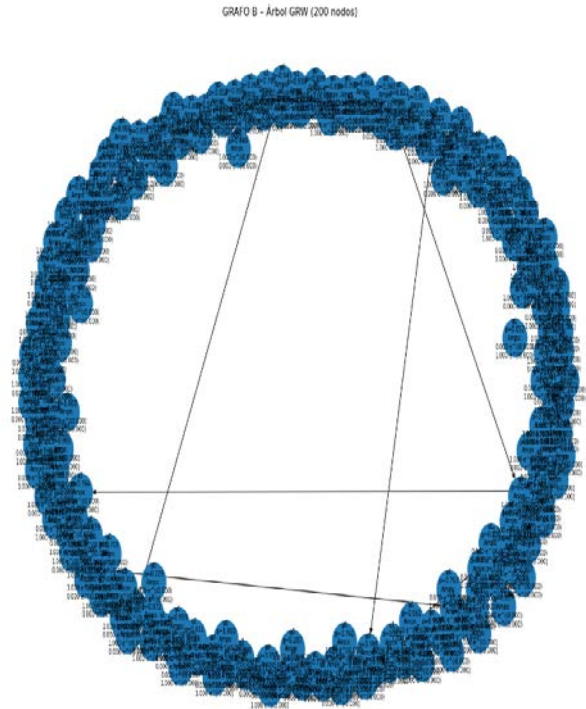


Fig. 9. Grafo B. Submuestra del conjunto de 1000 trayectorias de 200 nodos muestreados en el grafo de genealogía que forma el árbol GRW.

Por último el grafo C de la figura 10 describe como el *colapso* GRW mediante una simulación de dos estados ψ_t de SLE produce una cadena de transición Markoviana [38] [41] con sus respectivos pesos de transición producidos por los colapsos reales mediante una probabilidad de acuerdo a la definición 28 y la ecuación (31):

$$\mathbb{P}_{ij} = \mathbb{P}(\psi_{t+1} = \psi_j) \mid \psi_t = \psi_i \quad (51)$$

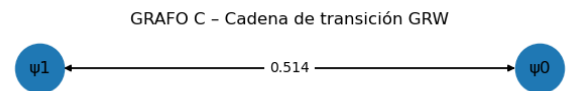


Fig. 10. Grafo C. Cadena de transición Markoviana y pesos producida por dos estados en la simulación SLE GRW.

El circuito cuántico del modelo que transita se describe en la figura 11 donde un solo *qubit* inicializa en $\psi(0) \mid \psi(0)$ con una rotación $R_y(\theta)$ (dinámica unitaria) y una medición en la base computacional salida clásica k que alimenta la función de elección AC .

1.-Estado inicial

$$\mid \psi(0) \rangle = c_0 \mid 0 \rangle + c_1 \mid 1 \rangle \quad (52)$$

2. Evolución Unitaria

$$|\psi(t)\rangle = R_y(\theta) |\psi(0)\rangle \quad (53)$$

3. Medición (M)

$$p(0|\psi) = |c_0|^2, p(1|\psi) = |c_1|^2 \quad (54)$$

4. Función de Elección AC

$$f_{AC}(k) = \psi_k \quad (55)$$

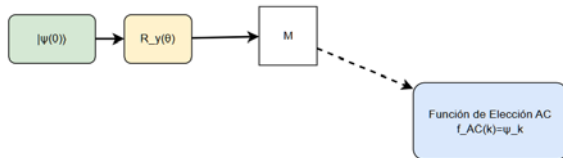


Fig. 11. Circuito cuántico.

CONCLUSIONES

Al realizar el modelo matemático del colapso formal *SLE-GRW* [29] como una función mediante el axioma de elección para familias infinitas contables de estados cuánticos discretos se lograron los siguientes puntos relevantes:

La teoría de colapso formal planteado por *Ghirardi-Rimini-Weber* de los eventos de localización espontánea (*SLE*) [29] carece de un modelo que justifique axiomáticamente el salto elegido; por lo que la propuesta de usar el axioma de elección de de Zermelo-Fraenkel [3][4][5][11] mediante la función de elección f_c formaliza la teoría desde un aspecto matemático en la definición 6 y la proposición 1 con sus dos respectivas demostraciones.

Se desarrolló el concepto de familias infinitas contables de estados cuánticos discretos (*CIFDQS*) mediante la definición 22 y su ecuación (24) para poder utilizar el axioma de elección Zermelo-Fraenkel [5][11]; lo cual contribuye a la teoría de colapso formal *GRW-SLE* [29] al estructurar como una familia al conjunto de estados cuánticos mediante los principios matemáticos de la teoría de conjuntos [3][4][5][11].

Se comentaron y modernizaron los trabajos de Fraenkel[5] y Zermelo[3][4] [11] para poder utilizarse con la teoría *GRW-SLE* [29] en el artículo tanto en las definiciones como en los primeros 7 teoremas; para poder utilizar los conceptos de urelementos, celdas, sistema generado y simetrías mediante la *función de elección* f_c para familias numerables.

Se logró que el concepto de *AC* en el contexto *GRE-SLE* fuera independiente del resto de axiomas de Zermelo [11] por el concepto de propiedad definida \square .

Se realizó un programa en *Python* que permite la simulación del modelo matemático del colapso formal *SLE-GRW* como una función mediante el axioma de elección para *CIFDQS* en *QISKIT* mediante la creación del *método choose* y la función *ChoiceFunctionAC A*.

La simulación permitió generar una realización estocástica con 6 colapsos ψ_t .

La simulación generó un matriz heatmap permitió obtener un color de similar a la ecuación (31) de modo: $ptk=pk\psi(t)$.

Se generó un espectro Born previo al colapso y su histograma obtenidos después del colapso.

Se generó un grafo con una sola realización estocástica mediante 6 colapsos ψ_t y posteriormente una submuestra del conjunto de 1000 trayectorias de 200 nodos muestreados en el grafo de genealogía del árbol.

Se generó en *QISKIT* una cadena de transición Markoviana con sus respectivos pesos producida por dos estados en la simulación.

Así mismo *QISKIT* permitió simular un circuito cuántico.

Al existir un modelo matemático del colapso formal *SLE-GRW* [29] como mediante la *función de elección* f_c con el axioma de elección *AC* y una estructura de familias *CIFDQS*; esto establece el principio para la creación de trabajos que desarrollen axiomas similares a la teoría de conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* [3][4][5][11] para la teoría *GRW-SLE* [29].

REFERENCIAS

- [1] J. A. Wheeler, "Law without law," in Quantum Theory and Measurement, J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Eds., Princeton University Press, 1983, pp. 182–213.
- [2] Real Academia Española, "elección," Diccionario de la lengua española, 23.ª ed.
- [3] Zermelo, E., "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)", Mathematische Annalen, Vol. 59, 1904, pp. 514–516
- [4] Zermelo, E. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I", Mathematische Annalen 65 (1908), 261–281
- [5] Fraenkel, A. A., "Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms", Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1922.
- [6] G. C. Ghirardi, A. Rimini, and T. Weber, "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems," Physical Review D, vol. 34, no. 2, pp. 470–491, 1986.
- [7] G. Cantor, "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I", Mathematische Annalen, vol. 46, pp. 481–512, 1895.
- [8] D. Hilbert, "Mathematical Problems", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, pp. 437–479, 1902.
- [9] Diccionario esencial de matemáticas. VOX. 6 de 2011. p. 15
- [10] R. Dedekind, "Was sind und was sollen die Zahlen?" Braunschweig: Vieweg, 1888.
- [11] E. Zermelo, "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung," Mathematische Annalen, vol. 65, pp. 107–128, 1908.
- [12] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. I: Théorie des ensembles*, Paris: Hermann, 1939.
- [13] G. Hamel, "Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$," Mathematische Annalen, vol. 60, pp. 459–462, 1905.
- [14] G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, vol. I. Halle, Germany: H. Pohle, 1893.
- [15] E. Galois, "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux," Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (original de 1832), 1846
- [16] F. Klein, "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen," Erlangen, 1872.
- [17] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea Publishing Co., 1957.
- [18] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Verlag, 1932.
- [19] C. Hermite, "Sur quelques applications des fonctions elliptiques," Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 52, pp. 1–20, 1856.

- [20] V. Moretti, *Spectral Theory and Quantum Mechanics: With an Introduction to the Algebraic Formulation*, Springer, Cham, 2017.
- [21] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2010
- [22] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006
- [23] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer, New York, 1990.
- [24] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.
- [25] G. Peano, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, Torino: Bocca, 1884.
- [26] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [27] W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik," *Zeitschrift für Physik*, vol. 43, pp. 172–198, 1927.
- [28] E. Schrödinger, "Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)," *Annalen der Physik*, ser. 4, vol. 79, pp. 361–376, 1926.
- [29] G. C. Ghirardi, A. Rimini, and T. Weber, "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems," *Physical Review D*, vol. 34, no. 2, pp. 470–491, 1986.
- [30] A. Bassi and G. C. Ghirardi, "Dynamical reduction models," *Physics Reports*, vol. 379, no. 5–6, pp. 257–426, 2003.
- [31] M. Leckey and A. P. Flitney, "Spontaneous Collapse of the Wavefunction: a Testable Model Motivated by Discrete Physics," arXiv:2303.03096, 2025. <https://arxiv.org/html/2303.03096v2#S11>
- [32] M. Born, "Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge," *Zeitschrift für Physik*, vol. 37, pp. 863–867, 1926. (Reprinted in J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Eds., *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, 1983.)
- [33] M. Born, "The statistical interpretation of quantum mechanics," Nobel Lecture, Dec. 11, 1954. [Online]. Available: <https://www.nobelprize.org>
- [34] R. B. Griffiths, *Consistent Quantum Theory*, Cambridge University Press, 2002.
- [35] M. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition*, Springer, 2007.
- [36] H. Everett, "Relative state formulation of quantum mechanics," *Reviews of Modern Physics*, vol. 29, pp. 454–462, 1957.
- [37] R. Penrose, "On gravity's role in quantum state reduction," *General Relativity and Gravitation*, vol. 28, no. 5, pp. 581–600, 1996.
- [38] A. Bassi et al., "Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests," *Reviews of Modern Physics*, vol. 85, pp. 471–527, 2013.
- [39] W. H. Zurek, "Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?" *Physical Review D*, vol. 24, pp. 1516–1525, 1981.
- [40] IBM Quantum, "Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing," 2017. [Online]. Available: <https://qiskit.org>
- [41] B. Schumacher, "Quantum coding," *Phys. Rev. A*, vol. 51, no. 4, pp. 2738–2747, 1995.
- [42] IBM Quantum, "What is a qubit?," IBM Think blog, 2025. [Online]. Available: <https://www.ibm.com/think/topics/qubit>
- [43] A. Barchielli and M. Gregoratti, "Quantum Trajectories and Measurements in Continuous Time," Springer, 2009.
- [44] W. Rudin, "Principles of Mathematical Analysis," 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [45] H. Wiseman and G. Milburn, "Quantum Measurement and Control," Cambridge Univ. Press, 2010.
- [46] K. Jacobs and D. Steck, "A straightforward introduction to continuous quantum measurement," *Contemp. Phys.*, vol. 47, pp. 279–303, 2006.
- [47] M. B. Plenio and P. L. Knight, "The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, pp. 101–144, 1998.

Propuestas de modelos matemáticos en fractal cuántico, inteligencia artificial y probabilidades.

Fernando Gustavo Isa Massa

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Tucumán
San Miguel de Tucumán – Tucumán, Argentina

ferim74@yahoo.com.ar

<https://orcid.org/0000-0002-8609-249X>

Resumen Los tres modelos matemáticos que se plantean generan desde lo teórico, una abstracción de la inteligencia artificial donde el modelado de árbol y bosque con una probabilidad, siendo utilizado en siete nuevas inversiones que mejoran doce variables económicas. El problema de la generación de empleo, es abordado junto a el crecimiento del delito con una ecuación de probabilidades que es deducible de las causas y consecuencias derivadas. El tercer modelo es un fractal cuántico que desde lo teórico se demuestra con la autosimilitud y dimensión fractal y en lo cuántico con varias probabilidades para un mismo método de búsqueda. Usado en situación de conflicto armado, búsqueda de personas y física.

Palabras Clave- cuántico, inteligencia artificial, fractal, probabilidad.

Abstract- The three proposed mathematical models generate, from a theoretical perspective, an abstraction of artificial intelligence where tree and forest modeling with a probability is used in seven new investments that improve twelve economic variables. The problem of job creation is addressed alongside the growth of crime with a probability equation that can be deduced from the resulting causes and consequences. The third model is a quantum fractal that, theoretically, demonstrates self-similarity and fractal dimension, and in quantum terms, it demonstrates multiple probabilities for the same search method. It is used in situations of armed conflict, search and rescue, and physics.

Keywords- quantum, artificial intelligence, fractal, probability.

Mathematical Subject Classification: 81P15, 68T01, 28A80, 60-XX.

I. INTRODUCCIÓN

La búsqueda de soluciones desde las ciencias duras para las ciencias sociales y humanas, se potencia con la elaboración de modelos matemáticos, en los nuevos paradigmas modernos como lo son la inteligencia artificial, los fractales y la física cuántica; que, junto a las probabilidades, generan un marco conceptual y metodológico de amplias aplicaciones. Los modelos teóricos son demostrados en búsqueda de personas, simulación de conflictos bélicos, física cuántica, siete nuevos modelos de inversión, generación de empleo y aumento de la inseguridad o delito.

II. DESARROLLO.

Axioma 1

Axiomas de Kolmogorov

1- No negatividad

$$Pr(x) \geq 0$$

2- Normalización

$$\int Pr(x) = 1 \text{ (o suma} = 1 \text{ en caso discreto)}$$

3- Aditividad

Se necesita

- Dominio definido
- Constante de normalización
- Interpretación física o geométrica

Estructura o dominio fractal – cuántica

$X \in [0, 2\pi]$ (periodicidad – estructura fractal ondulatoria)

$a > 1$ (evita divergencias)

$c \in \text{reales}$.

Axioma fundamental

La probabilidad de ocurrencia de un evento x en un sistema cuántico – fractal está determinada por un peso exponencial inverso de su fase ondulatoria

Axioma de normalización

Axioma de conservación probabilística

Existe una constante Z tal que

$$Z = \int_0^{2\pi} a^{-(\cos x + c)} dx$$

$$P(x) = \frac{a^{-(\cos x + c)}}{Z}$$

Garantiza que

$$\int_0^{2\pi} P(x) dx = 1$$

Axioma de autosimilitud fractal

La distribución de probabilidad es invariante bajo transformaciones de escala angular

Axioma de interpretación cuántica

La función $P(x)$ no representa una probabilidad clásica directa, sino la medida estadística emergente de interferencias cuánticas distribuidas fractal

$$P(x) \geq 0$$

$$\int P(x) dx = 1$$

Teorema 1: Fractal cuántico.

Si tenemos un fractal lineal con demostración en su autosimilitud y dimensión con un modelo de probabilidad de estadística circular, entonces podemos inferir que es un fractal cuántico ya que sus valores están distribuidos con distintas probabilidades y su modelo de probabilidad es: $P_r = a^{-(\cos x + c)}$

Demostración

Si tenemos el siguiente modelo de probabilidad en estadística circular

$$Pr = a^{\sin x}$$

Tomamos en consideración un incremento de $\sin x$

$$\begin{aligned} Pr &= a^{\sin x \cdot \Delta x} \\ \text{Para valores pequeños} \\ \Delta x &\rightarrow dx \\ Pr &= a^{\sin x \cdot dx} \\ \ln Pr &= \sin x \, dx \cdot \ln a \\ \text{Integro} \\ \ln Pr &= (-\cos x + c) \cdot \ln a \\ Pr &= \frac{1}{e^{(\cos x + c) \cdot \ln a}} \\ Pr &= (e^{\ln a})^{-(\cos x + c)} \\ (e^{\ln a}) &= a \\ Pr &= a^{-(\cos x + c)} \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado ■

Escolio

$$\begin{aligned} 0 &\leq Pr \leq 1 \\ 1 &\leq a < \infty \\ 0 &\leq c < \infty \\ 0 &\leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Extremos relativos

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ Pr &= \frac{1}{e^{(\cos 0 + c) \cdot \ln a}} \\ Pr &= \frac{1}{e^{(1 + c) \cdot \ln a}} \end{aligned}$$

Cuando x toma su mínimo valor la Pr depende de las variables C, A

$$\begin{aligned} X &= \frac{\pi}{2} \\ Pr &= \frac{1}{e^{(\cos \frac{\pi}{2} + c) \cdot \ln a}} \\ Pr &= \frac{1}{e^{(\cos \frac{\pi}{2} + c) \cdot \ln a}} \\ Pr &= \frac{1}{e^{c \cdot \ln a}} \end{aligned}$$

También podemos determinar que la probabilidad para valores de $x = \frac{\pi}{2}$ o su máximo valor que dependen de las variables c, a

$$A = 1$$

$$\begin{aligned} Pr &= \frac{1}{e^{(\cos \frac{\pi}{2} + c) \cdot \ln a}} \\ Pr &= 1 \end{aligned}$$

Consideramos que el valor mínimo de a nos lleva a la mayor probabilidad

$$A \rightarrow \infty$$

Para valores grandes de a tenemos

$$\begin{aligned} Pr &= \frac{1}{e^{\infty}} \\ Pr &= 0 \end{aligned}$$

La probabilidad es menor debido a altos valores de a

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ Pr &= \frac{1}{e^{(\cos x + 0) \cdot \ln a}} \\ Pr &= \frac{1}{e^{\cos x \cdot \ln a}} \end{aligned}$$

Debido a su naturaleza cuántica los distintos valores de c nos llevan a distintas probabilidades

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \infty \\ Pr &= \frac{1}{e^{(\cos x + \infty) \cdot \ln a}} \\ Pr &= \frac{1}{e^{\infty}} \\ Pr &= 0 \end{aligned}$$

Con altos valores de la constante de integración c esperamos valores pequeños de probabilidad

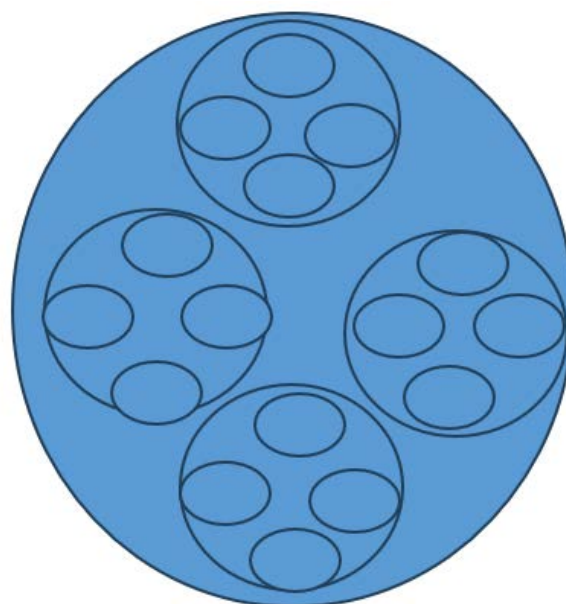


Fig. 1. Fractal cuántico.

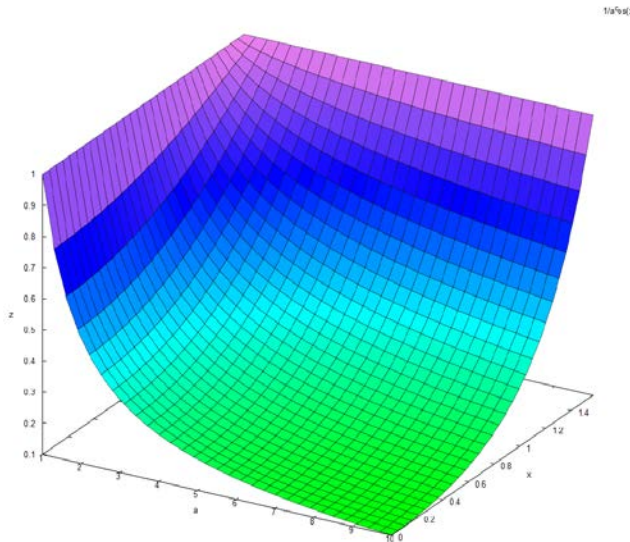


Fig. 2. Modelo de probabilidad

Fractal en forma de círculos
Dimensión: partimos de la cantidad de cortes y cantidad de repeticiones
Cortes: 4
Repeticiones: 5

$$D = \frac{\ln 5}{\ln 4} = 1,16096$$

Esa es su dimensión fractal, visto en [1]

Fractal en forma de círculos
Auto similitud
Partamos de la ecuación del círculo

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\text{Producto } Dx \\ Dx \cdot x^2 + Dx \cdot y^2 = Dx \cdot R^2$$

$$\frac{x^3}{3} + x \cdot y^2 = x \cdot R^2$$

$$\text{Producto por } Dy \\ \frac{x^3}{3} \cdot Dy + x \cdot y^2 \cdot Dy = x \cdot Dy \cdot R^2$$

$$\frac{x^3}{3} \cdot Y + \frac{y^3}{3} \cdot X = x \cdot y \cdot R^2$$

$$\frac{x^3}{3} \cdot Y + \frac{y^3}{3} \cdot X = x \cdot y \cdot R^2$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = R^2 \\ x^2 + y^2 = 3 \cdot R^2$$

Si volvemos hacer los mismos pasos R se incrementa en productos por 3

$$x^2 + y^2 = 3^n \cdot R^2$$

Por lo tanto, se demuestra la auto similitud de círculos en otros círculos con un radio distinto, visto en [2]

Corolario

Sea la densidad de probabilidad fractal – cuántica

$$P(x) = \frac{a^{-(\cos x + c)}}{\int_0^{2\pi} a^{-(\cos x + c)} dx} \quad a > 1$$

Entonces

La probabilidad se concentra preferentemente en las regiones donde la fase oscilatoria es mínima

Demostración

- 1- La función exponencial inversa cumple: a^{-y} es estrictamente decreciente en y
- 2- Como $\cos x \in [-1, 1]$ el exponente $(\cos x + c)$ es mínimo cuando $\cos x = -1$ entonces $x = a^{-(1+c)} + 2\pi k$
- 3- En estos puntos $P(x) \propto a^{-(1+c)} = a^{(1-c)}$
- 4- Los mínimos probabilísticos ocurren cuando
- 5- $\cos x = 1$ entonces $x = 2\pi k$

La figura 1 nos muestra las propiedades de los fractales en su autosimilitud al desprenderse estadísticamente de la figura principal otras figuras parecidas. Esta autosimilitud estadística nos infiere también en la dimensión fractal que debe pertenecer a los reales y no entera. La figura al dividirse en cuatro figuras nuevas representa el número de cortes.

La figura 2 considera el modelo de probabilidades propuesto, tiene como eje Z a la probabilidad Pr , los otros ejes representan a las variables: a, c .

Su representatividad es esencial a la interpretación matemática del modelo cuántico – fractal.

Teorema 2: Inteligencia artificial bosque

Si tenemos un modelo de probabilidades $y = a^{(\cos x)}$, entonces cada árbol de un bosque puede definirse como $Pri = a^{(\sin x + c)}$ y el promedio de los árboles como una ecuación de bosque de la forma: $Prb = (a_1^{(\sin x_1 + c_1)} + a_2^{(\sin x_2 + c_2)} + \dots + a_n^{(\sin x_n + c_n)})/n$

Demostración

Si tenemos el siguiente modelo de probabilidad en estadística circular

$$Pr = a^{\cos x}$$

Tomamos en consideración un incremento de $\sin x$

$$Pr = a^{\cos x \cdot \Delta x}$$

Para valores pequeños

$$\Delta x \rightarrow dx$$

$$Pr = a^{\cos x \cdot dx}$$

$$\ln Pr = \cos x \cdot dx \cdot \ln a$$

Integro

$$\ln Pr = (\sin x + c) \cdot \ln a$$

$$Pr = \frac{1}{e^{(\sin x + c) \cdot \ln a}}$$

$$Pr = (e^{Ln a})^{(sin x + c)}$$

$$(e^{Ln a}) = a$$

$$Pr = a^{(sin x + c)}$$

Con lo que queda demostrado

$$0 \leq Pr \leq 1$$

$$0 \leq a \leq 1$$

$$0 \leq c < \infty$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Extremos relativos, visto en [3]

$$X = 0$$

$$Pr = a^{(sin 0 + c)}$$

$$Pr = a^{(c)}$$

Cuando x toma su mínimo valor la Pr depende de las variables C, A

$$X = \frac{\pi}{2}$$

$$Pr = a^{(sin \frac{\pi}{2} + c)}$$

$$Pr = a^{(1 + c)}$$

También podemos determinar que la probabilidad para valores de $x = \frac{\pi}{2}$ o su máximo valor que dependen de las variables c, a

$$A = 0$$

$$Pr = 0^{(sin x + c)}$$

$$Pr = 0$$

Consideramos que el valor mínimo de a nos lleva a la menor probabilidad

$$A = 1$$

Para valores grandes de a tenemos

$$Pr = 1^{(sin x + c)}$$

$$Pr = 1$$

La probabilidad es mayor debido a altos valores de a

$$C = 0$$

$$Pr = a^{(sin x + 0)}$$

$$Pr = a^{(sin x)}$$

Debido a su naturaleza cuántica los distintos valores de c nos llevan a distintas probabilidades
 $C \rightarrow \infty$

$$Pr = a^{(sin x + \infty)}$$

$Pr = 0$ debido a que un valor de a entre 0 y 1 potencia infinito se va haciendo cada vez más pequeño hasta llegar a 0 Bosque.

$$Prb = (a_1^{(sin x_1 + c_1)} + a_2^{(sin x_2 + c_2)} + \dots + a_n^{(sin x_n + c_n)})/n$$

Esta relación matemática promedia los árboles en un bosque de probabilidades, visto en [4]

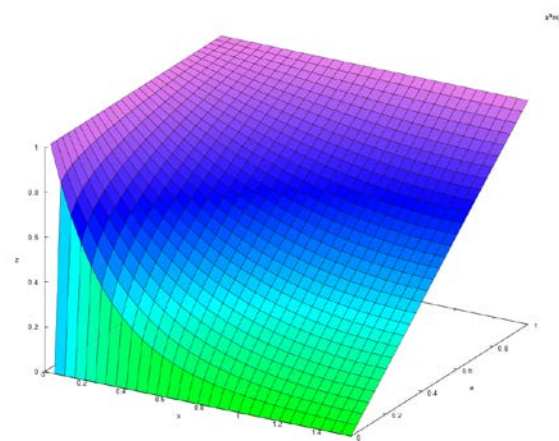


Figura 3. Modelo de árbol

Los parámetros de la figura 3 son eje Z es la probabilidad de árbol y los otros dos ejes son las variables: a, c. Se observa valores entre 0 y 1 en el eje Z de la probabilidad

Teorema 3: Si tenemos causas y consecuencias en un modelo, entonces su forma final será: $Pr = (1/2) \cdot (((C1^2 \cdot (Co11^2 + \dots + Co1k^2))/k1)^{(1/t1)} + ((C2^2 \cdot (Co21^2 + \dots + Co2k^2))/k2)^{(1/T2)} + \dots + ((Cnn \cdot (Con1^2 + \dots + Conk^2))/kn)^{(1/Tn)}) / n$

Ci: Causas

Coij: Consecuencias

Demostración
Extremos relativos

$$1)$$

$$Ci = 0$$

$$Pr = 0$$

$$2)$$

$$Ci = 1$$

$$Pr = (1/2) \cdot (((Co11^2 + \dots + Co1k^2)/k1)^{(1/t1)} + ((Co21^2 + \dots + Co2k^2)/k2)^{(1/T2)} + \dots + ((Con1^2 + \dots + Conk^2)/kn)^{(1/Tn)}) / n$$

Cuando no encontramos causas la probabilidad depende enteramente de Cij y Ti, visto en [5]

$$3) Coi = 0$$

$$Pr = 0$$

$$4) Coi = 1$$

$$Pcc = (1/2 \cdot ((k1/k1)^{(1/t1)} + (1/2 \cdot (k2/k2)^{(1/T2)} + \dots + ((kn/kn)^{(1/tn)}) / n$$

$$Pcc = 1/2 \cdot (1 + 1 + \dots + 1) / n$$

$$Pcc = 1/2$$

$$5) Ti = 0$$

$$Pr = 0$$

Al hacer potencias de infinito los números Ci y Coi van disminuyendo su valor hasta no tener ninguno, visto en [6]

$$6) Ti \rightarrow \infty$$

$$Pr = 1/2$$

III. TEOREMAS Y AXIOMAS.

Teorema 1

1) $Pr \geq 0$

Se cumple si $a > 0$ y $a \neq 1$

Las funciones exponenciales son siempre positivas

2) Cota superior

$$0 \leq Pr \leq 1$$

El exponente varía en

$$-(\cos x + c) \in (-(1 + c), -(1 + c))$$

Entonces

$$P_{MAX} = a^{-(1+c)} = a^{(1-c)}$$

Para exigir $Pr \leq 1$

$$a^{(1-c)} \leq 1$$

Esto explica

$$\text{Si } a > 1 \rightarrow c \geq 1$$

$$\text{Si } 0 < a < 1 \rightarrow c \leq 1$$

Teorema 2

1) No negatividad

$$Pr \geq 0$$

Se cumple axiomáticamente para $a > 0$

2) Cota superior

$$\sin x \in [-1, 1]$$

$$\text{Exponente } \sin x + c \in [c - 1, c + 1]$$

Entonces

$$Pr_{MIN} = a^{c-1}, Pr_{MAX} = a^{c+1}$$

Para que $Pr \leq 1$

$$\text{A) Si } a > 1: c + 1 \leq 0 \rightarrow c \leq -1$$

$$\text{B) Si } 0 < a < 1$$

$$C + 1 \geq 0 \rightarrow C \geq -1$$

$$\text{Para } Pr \geq 0 \text{ ya basta } a > 0.$$

IV. ESCOLIO.

En situación de un conflicto bélico dos aspectos son estudiados:

Lugares de refugio y búsqueda de alimentos

Se simulan para cada uno de los cuatro círculos inscritos en el círculo mayor del fractal, con números pseudo aleatorios y la variable normal

A) Lugares con muchos muertos y heridos (Referencia estadística promedio)

$$\text{Media} = 30\% \text{ (sobre población total)}$$

$$\text{Desvío} = 5\% \text{ (sobre población total)}$$

$$C1 = 0,28057$$

$$C2 = 0,36770$$

$$C3 = 0,28360$$

$$C4 = 0,36767$$

B) Lugares con muchos refugiados (Referencia estadística promedio)

$$\text{Media} = 70\% \text{ (sobre el total de la población)}$$

$$\text{Desvío} = 10\% \text{ (sobre el total de la población)}$$

$$X1 = 0,62291 = 56,6919^\circ$$

$$X2 = 0,63251 = 56,9259^\circ$$

$$X3 = 0,75693 = 68,1237^\circ$$

$$X4 = 0,74187 = 66,7683^\circ$$

C) Zonas más críticas por ser estratégicas al enemigo

$$\text{Media} = 55\% \text{ (sobre el total de la población)}$$

$$\text{Desvío} = 0,05\% \text{ (sobre el total de la población)}$$

$$A1 = 0,50266 = 7,18085$$

$$A2 = 0,55695 = 7,95642$$

$$A3 = 0,53410 = 7,63$$

$$A4 = 0,58993 = 8,42757$$

Calculemos las probabilidades del fractal cuántico

Pr1: modelo de probabilidad que representa: A1, X1, C1

Pr2: modelo de probabilidad que representa: A2, X2, C2

Pr3: modelo de probabilidad que representa: A3, X3, C3

Pr4: modelo de probabilidad que representa: A4, X4, C4

$$Pr1 = 7,18085^{-(\cos 56,6919^\circ + 0,28057)}$$

$$Pr1 = 0,19481$$

$$Pr2 = 7,95642^{-(\cos 56,9259^\circ + 0,36770)}$$

$$Pr2 = 0,15040$$

$$Pr3 = 7,63^{-(\cos 56,6919^\circ + 0,28360)}$$

$$Pr3 = 0,18411$$

$$Pr4 = 8,42757^{-(\cos 66,7683^\circ + 0,36767)}$$

$$Pr4 = 0,19701$$

Entonces se deduce que las cuatro probabilidades corresponden a cuatro círculos del fractal y su naturaleza cuántica corresponde a que pueden estar en los cuatro círculos con distintas probabilidades. También, se considera como las mayores probabilidades son: $Pr4 = 0,19701$ y $Pr1 = 0,19481$.

La naturaleza cuántica es la que explica que a mayores valores de las variables: a, c, x los valores de probabilidades pueden ser menores o los más grandes. Una deducción del caso para los menores valores de las variables que generan altas probabilidades es que los apartados A, B, C son determinantes en la supervivencia en zonas de conflictos; entonces encontraremos refugios en lugares con pocas bajas humanas, poca concentración de refugiados y alejados de zonas estratégicas para el enemigo.

Búsquedas de personas y trata de personas

Simulamos distancias variables (variable c), con otros datos constantes como ser zonas de peligro y cantidad de casos en las zonas estudiadas

Media = 0,45 (distancia máxima con la última vez que se vio a la víctima), referencia estadística promedio

$$\text{Desvío} = 0,05$$

$$C1 = 0,51847$$

$$C2 = 0,45569$$

$$C3 = 0,42479$$

Zonas de peligro constantes (referencia estadística promedio)

A = 6 (Kilómetros desde la zona que se observó por última vez a la víctima)

Cantidad de casos en zonas estudiadas

$$X = 70^\circ$$

$$Pr1 = 6^{-(\cos 70^\circ + 0,51847)}$$

$$Pr1 = 0,21399$$

$$Pr2 = 6^{-(\cos 70^\circ + 0,45569)}$$

$$Pr2 = 0,23947$$

$$Pr3 = 6^{-(\cos 70^\circ + 0,42479)}$$

$$Pr3 = 0,25310$$

La conclusión que se saca es que a menores distancias de la última vez que se vio a la víctima es más probable

encontrarla, entonces hay que buscar las primeras 12h en lugares cercanos.

Veamos ahora la simulación para áreas de búsqueda

$$C = 0,25$$

$$A = 7$$

$Pr = 0,8$ (la alta probabilidad sugerida aumenta el éxito en la búsqueda)

$$Pr = a^{-(\cos x + c)}$$

$$\ln 0,8 = \ln 7 \cdot (-(\cos x + 0,25))$$

$$\frac{\ln 0,8}{\ln 7} - 0,25 = -\cos x$$

$$\cos x = 0,36467$$

$$X = 68,61272^\circ$$

Con una alta probabilidad de encontrar a la víctima, podemos inferir un área de $x = 68,61272^\circ$ que ocupa más de los dos tercios del área total del círculo.

Física y área más probable de encontrar a los electrones
Fijemos la cantidad de electrones en el litio cuyo número atómico es 3 lo que significa 3 electrones en un átomo neutro

$$A = 3 \text{ (cantidad de electrones)}$$

$$C = 0,23$$

(volatilidad del electrón en su naturaleza cuántica)

$$Pr = 0,5$$

$$Pr = a^{-(\cos x + c)}$$

$$\ln 0,5 = \ln 3 \cdot (-(\cos x + 0,23))$$

$$\frac{\ln 0,5}{\ln 3} - 0,23 = -\cos x$$

$$\cos x = 0,86092$$

$$X = 30,57996^\circ$$

El área queda en un tercio del total del círculo, lo que deja como corolario que la variable cuántica c , es de vital importancia.

Teorema 2

$$Pr = a^{(\sin x + c)}$$

Siete modelos de inversión

Caso 1: Se invierte desde una aplicación, bajando los costos operativos, para nuevas y actuales empresas pymes; y se cobra tanto el capital como los intereses desde cada compra o consumo de productos de fabricación nacional descontando de los impuestos que el consumidor o inversor genera en la compra. Los beneficiarios del préstamo lo pagan en cuotas al estado, que es el que financia los impuestos y garante final.

Caso 2: Idéntico formato que el primero, pero para invertir en empresas de producción primaria o agricultura y ganadería

Caso 3: Idéntico al primero, con inversiones en empresas tecnológicas.

Caso 4: Idéntico al primero, con inversiones en empresas industriales que explotan y le dan valor agregado a la producción primaria de agricultura y ganadería.

Caso 5: Idéntico al primero, con inversiones en empresas industriales en general.

Caso 6: Idéntico al primero, con inversiones en la obra pública, aquí el que paga es el estado.

Caso 7: Idéntico al primero, con inversiones en la construcción de vivienda para ciudadanos que son los que pagan el préstamo.

Beneficios, visto en [7]

- 1- Las inversiones generan riquezas en el aumento del PBI
 - 2- Baja de los impuestos para los inversores
 - 3- Aumento de mano de obra y del consumo
 - 4- Mayor recaudación impositiva del estado
 - 5- Menor evasión
 - 6- Viviendas para ciudadanos
 - 7- Obra pública que mejora las ciudades y pueblos
 - 8- Al aumentar la mano de obra se mejora la recaudación para beneficios de los jubilados
 - 9- Mayor ingreso de nuevos emprendedores en los siete modelos de inversión, lo que genera ingresos de divisas al país.
 - 10 - Baja del riesgo país
 - 11- Baja de la inflación al mejorar la oferta y bajar impuestos
 - 12 - Se podría bajar los impuestos de los emprendedores y demás ciudadanos al aumentar la recaudación final del país
- Simulamos las variables para los siete modelos de inversión
Media = 0,35 (corresponde a un aumento porcentual del crédito)

$$Desvío = 0,05$$

$$A1 = 0,34951$$

$$A2 = 0,37418$$

$$A3 = 0,37981$$

$$A4 = 0,40647$$

$$A5 = 0,41082$$

$$A6 = 0,31429$$

$$A7 = 0,30356$$

Tomemos como referencia un valor constante para la variable x que es el porcentaje de sociedad beneficiada

$X = 70^\circ$ (más de los dos tercios de la población beneficiada)

$Pr = 0,85$ (alta probabilidad sugiere un crecimiento del PBI)

Caso 1

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,34951$$

$$C = -0,78509$$

La constante C en el cálculo de un valor negativo, pero a los fines matemáticos y no superficialmente se toma como valor positivo. Entonces queda

$$C = 0,78509$$

Traduciéndose que casi el 1% del PBI crecerá con este crédito a las pymes

Caso 2

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,37418$$

$$C = -0,77436$$

Convierto en un valor positivo

$$C = 0,77436$$

Con lo que queda casi un aumento del 1% del PBI

Caso 3

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,37981$$

$$C = -0,77181$$

Convierto en un valor positivo

$$C = 0,77181$$

Aumento aproximado de 1% de PBI

Caso 4

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,40647$$

$$C = -0,75916$$

Convierto en un valor positivo

$$C = 0,75916$$

Cercano al 1% de crecimiento de PBI

Caso 5

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,41082$$

$$C = -0,75700$$

Convierto en un valor positivo

$$C = 0,75700$$

Se aumento casi 1% de PBI

Caso 6

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,31429$$

$$C = -0,79928$$

Convierto en un valor positivo

$$C = 0,79928$$

Se aumento casi 1% de PBI

Caso 7

$$\ln 0,85 = (\sin 70^\circ + c) \cdot \ln 0,30356$$

$$C = -0,80337$$

Convierto en un valor positivo

$$C = 0,80337$$

Se aumento casi 1% de PBI

Veamos cómo sigue la inteligencia artificial expuesta en un bosque

$$Pr = (0,78509 + 0,77436 + 0,77181 + 0,75916 \\ + 0,75700 + 0,79928 + 0,80337) / 7$$

$$Pr = 0,77858$$

Entonces la conclusión final es que un aumento del 35% en los créditos, un 0,85 de probabilidad y más de dos tercios de los habitantes beneficiados tiene como objetivo cumplido un aumento del 0.77858% del PBI.

Partamos del análisis de causas y consecuencias

Caso 1

Causas: inversión privada y pública

Consecuencias: Generación de empleo

Co1: Público, tasa de público = 0,3

Co2: Privado, tasa de lo privado = 0,4

Demostración

$$Pr1 = 0,75$$

$$Ca1 = 0,85$$

(partimos de una inversión muy favorable)

$$T1 = 6 \text{ meses}$$

$$Ca2 = 0,55$$

(no es tan favorable la inversión)

$$Pr2 = 0,45$$

$$T2 = 8 \text{ meses}$$

$$0,75 \geq \frac{1}{2} \cdot (0,85 \cdot (0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2))^{1/6}$$

$$0,45 \geq \frac{1}{2} \cdot (0,55 \cdot (0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2))^{1/8}$$

Este sistema de ecuaciones con dos incógnitas lo resolvemos analíticamente

$$\ln (0,75 \cdot 2) \geq 1/6 \cdot \ln (0,85 \cdot (0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2))$$

$$2,43279 \geq \ln (0,85 \cdot (0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2))$$

$$(0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2) \leq 13,40072$$

La segunda inecuación tiene el siguiente análisis

$$\ln (0,45 \cdot 2) \geq 1/8 \cdot \ln (0,55 \cdot (0,3 \cdot Co1^2 + 0,4 \cdot Co2^2))$$

$$-0,84288 \geq \ln (0,55 \cdot (0,3 \cdot Co1^2 + 0,4 \cdot Co2^2))$$

$$(0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2) \leq 0,78267$$

Quedando un sistema de dos ecuaciones cuadráticas que pueden ser resueltas con programación no lineal. Se usó software matemático LINGO

$$(C_{o1}^2 + C_{o2}^2) \rightarrow MAX$$

$$(0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2) \leq 13,40072$$

$$(0,3 \cdot C_{o1}^2 + 0,4 \cdot C_{o2}^2) \leq 0,78267$$

Los resultados en el software libre LINGO arrojan para Co1, Co2

$$Co1 = 1,615209$$

$$Co2 = 0$$

Entonces la primera consecuencia es la solución y podemos esperar que se generará mayor cantidad de empleos públicos, que es $Co1 = 1,615209$. Interpretamos este valor como un incremento de 1.615209% del PBI en empleos públicos.

Segundo ejemplo

Caso 2

Empleos mal pagados generan la necesidad de ganar más dinero con la delincuencia, visto en [8]

$$Pr = 0,75$$

$Ca = 0,85$ (un 85% de los casos de empleos mal pagados)

$T = 9$ (en meses es el tiempo de ruptura entre lo legal e ilegal)

Co: Entrar en la delincuencia como opción de obtener mayores ganancias

$$Pr = (Ca \cdot Co)^{1/t}$$

$$0,75 = (0,85 \cdot Co)^{1/9}$$

$$\ln 0,75 = 1/9 \cdot \ln (0,85 \cdot Co)$$

$$-2,58913 = \ln (0,85 \cdot Co)$$

$$0,85 \cdot Co = e^{-2,58913}$$

$$Co = 0,08833$$

La conclusión extraída de los análisis matemáticos es que alrededor del 8,833% de la población que cobra magros sueldos en el lapso de 9 meses podría dedicarse a la delincuencia.

V. CONCLUSIONES.

El planteo de diferentes temáticas sensibles y de urgente resolución es abstraída con tres modelos matemáticos originales; generando un enfoque sistémico y conceptual de difícil abordaje. Siendo notorio el vacío institucional de los temas analizados, se plantean estos modelos matemáticos originales para replantear y llenar ese vacío, muchas veces argumental y enfocado a las interacciones entre las ciencias duras y ciencias sociales. Este objetivo es cumplido y la sistematización de procesos complejos ayuda a las instituciones y demás actores privados a valerse de ellos para jerarquizar y resolver tales problemas.

AGRADECIMIENTOS

A los árbitros y sus generosas correcciones, Marcos Fajardo, a mi familia y amigos, AUS Damián García Pascualini, Ing. Gustavo Carrasco, Cdr. Arturo López, Cdr. Adolfo Rodríguez, Prof. María Leonor Gómez Llanos, Ing. Fanny Herrera, Dr. ing. Jorge Perera, Luis Sacaba, Ing. Ricardo Adra, Lic. Diego Di Pietro, Prof. Carlos Córdoba, Ing. Claudio Fernandez., AUS Adrián Murua, Ing. Walter Ballesteros, Sacerdote Miguel Galland.

REFERENCIAS

- [1] B. B. Manderbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. New York, NY, USA: W. H. Freeman, 1982
- [2] H. O. Peitgen, H. Jurgens y D. Saupe, *Chaos and Fractal: New Frontiers of Science*, 2nd ed. New York, NY USA: Springer-Verlag, 2004
- [3] S. J. Russell and P. Norvig, *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2020
- [4] C. C. Aggarwal, *Artificial Intelligence: A Textbook*. Cham, Switzerland: Springer, 2021
- [5] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probabilit, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4ta ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2002
- [6] J. L. Devore, *Probability and Statistics for Engineering and Sciences*, 9th ed. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2016
- [7] N. G. Mankiw, *Principies of Economics*, 9th ed. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2020.
- [8] A. Mas-Colell, M. D. Whinston, y J. R. Green, *Microeconomics Theory*. New York, NY, USA: Oxford University Press, 1995.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*